

Reactie van de werkgroep Wiskunde voor Morgen op de adviesvraag van de Onderwijsraad: ‘Wat is nodig om de beheersing van taal en rekenen te verhogen?’

In onze reactie richten we ons op rekenen en wiskunde, dat het aandachtsgebied vormt van de werkgroep Wiskunde voor Morgen. We spreken liever van ‘rekenen-wiskunde’ dan van ‘rekenen’, wat ons ook passend lijkt, omdat uit de inleidende tekst bij de vraagstelling blijkt dat rekenen heel ruim moet worden opgevat. Er wordt daar gesproken over het kunnen lezen en begrijpen van grafieken en tabellen en over voldoende gecijferd zijn.

In antwoord op de vraag hoe de beheersing van rekenen-wiskunde kan worden verhoogd doen we drie aanbevelingen. Deze betreffen,

1. Een verschuiving van onderwijs dat gericht is op het genereren van correcte antwoorden, naar een focus op de wiskunde achter de opgaven.
2. Een actualisering van de doelen van het reken-wiskundeonderwijs, rekening houdend met wat de gedigitaliseerde maatschappij vraagt.
3. Een permanente onderwijsinnovatie als een incrementeel proces, waarbij een balans wordt gezocht tussen de eisen die de maatschappij stelt en ervaringen van leraren met wat in de praktijk haalbaar is.

1. Van gerichtheid op goede antwoorden, naar een focus op de wiskunde achter de opgaven

Wanneer we rekenen ruim opvatten gaat het om meer dan het correct leren maken van bepaalde *opgaven*. We pleiten voor een fundamentele benadering waarbij het doel is dat de leerlingen zich de onderliggende *wiskunde* eigen maken. Uitgangspunt hierbij is dat je te maken hebt met een wiskundige werkelijkheid die losstaat van de alledaagse werkelijkheid. Dit komt bijvoorbeeld naar voren in de gebruikelijke manier om het oplossen van toepassingsproblemen te beschrijven. Daarbij worden de volgende stappen onderscheiden:

- het vertalen van het probleem in de werkelijkheid naar een (reken-)wiskundig probleem,
- het oplossen van dit reken-wiskundige probleem met (reken-)wiskundige middelen,
- het terugvertalen van de oplossing naar de oorspronkelijke probleemsituatie en
- het controleren of het oorspronkelijke probleem hiermee is opgelost.

Het oplossingsproces gaat heen-en-weer tussen de concrete werkelijkheid en de wiskunde. Eerst ga je van de werkelijkheid naar de wiskunde, dan los je het probleem binnen de wiskunde op en met die oplossing ga je terug naar de ‘gewone’ werkelijkheid. Deze beschrijving laat het bijzondere karakter van wiskunde zien. Je hebt als het ware twee lagen, de concrete werkelijkheid en de wiskundige werkelijkheid.

Leren van rekenen-wiskunde

Om erachter te komen hoe zo’n (reken-)wiskundige werkelijkheid ontstaat kunnen we kijken naar de geschiedenis van de wiskunde. Onderzoek van Anna Sfard (1991) heeft laten zien dat de geschiedenis van de wiskunde wordt gekenmerkt door een opeenvolging van *cycli, waarin processen het karakter krijgen van objecten*, die weer onderwerp van nieuwe processen worden.¹ Veel experts op het gebied van reken-wiskundeonderwijs benadrukken het belang van objectvorming, zij het soms in andere termen (Tall, Dubinsky, Cobb, Freudenthal, Van Hiele, Pirie, Kieren). Sfard wijst er verder op dat deze objectvorming niet absoluut is, de verbinding

¹ [Een internationaal perspectief op reken- en wiskundeonderwijs Nr. 1, over Sfard \(1991\)](#),

met het oorspronkelijke proces blijft bestaan. Een van de kenmerken van begrijpen van rekenen-wiskunde is juist dat je heen-en-weer kunt tussen proces en object. Ze spreekt daarom van dualiteit, wiskundige begrippen hebben altijd twee kanten, een proceskant en een objectkant.

Voorbeelden

Het onderscheid tussen proces en object kunnen we toelichten met natuurlijke getallen. Zo zal 6 primair een onderdeel zijn van het *proces* van het tellen. Maar wanneer leerlingen voldoende ervaring opdoen wordt 6 gekoppeld aan $6 = 3 + 3$, $6 + 1 = 7$, $6 + 6 = 12$ etc. Het getal 6 is nu een *object* geworden waarmee je kunt redeneren, bijvoorbeeld als je $6 + 7$ uitrekent via $6 + 6 = 12$ dus $6 + 7$ is één meer: 13.

Als tweede voorbeeld noemen we de breuken. Breuken ontstaan uit het *proces* van het delen van natuurlijke getallen. De ontstaansgeschiedenis van breuken als objecten is nog te zien in de notatie. Zo is $\frac{3}{4}$ in feite een verkorte notatie voor '3 gedeeld door 4'. Anders gezegd, $\frac{3}{4}$ verwijst naar het proces van het delen en is een aanduiding geworden voor het getal als *object*, $\frac{3}{4}$, de uitkomst van deze deling. Ook hier zijn getalrelaties de basis voor objectvorming, in dit geval relaties als, $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1 \frac{1}{2}$.

Op wiskundige ontwikkeling gericht onderwijs

De hierboven genoemde vakdidactische experts zien het ontwikkelen van wiskundige objecten als de kern van het leren van rekenen-wiskunde. De leerlingen moeten daar zelf een actieve rol in spelen. Startpunt betreffen processen in situaties waarin de leerlingen betekenisvol kunnen handelen en redeneren. Via het verkorten en generaliseren van deze processen en met behulp van geschikte representaties wordt objectvorming gestimuleerd. Daarbij geldt dat wiskundige objecten zelf weer onderwerp van nieuwe processen kunnen worden die tot nieuwe objecten leiden. Zo noemden we hierboven het ontstaan van breuken als objecten vanuit het proces van het delen van natuurlijke getallen. Dit onderwijs vereist passende leergangen en pedagogisch-didactische vaardigheden.

2. Actualisering, doelen afgestemd op wat de gedigitaliseerde maatschappij vraagt

In onze hoogtechnologische maatschappij hebben veel meer mensen dan vroeger reken-wiskundige kennis nodig om zinvol te kunnen participeren. Daarbij gaat het echter grotendeels om andere reken-wiskundige kennis dan nu wordt onderwezen. In het huidige onderwijs ligt het accent op vaardigheden die *concurrerend* zijn met wat computers kunnen, maar de maatschappij vraagt om reken-wiskundige kennis die *complementair* is aan wat computers bieden. De huidige doelen van het reken-wiskundeonderwijs sluiten daarom niet meer aan bij wat de maatschappij vraagt. De vraag: 'Wat is nodig om de beheersing van het rekenen te verhogen?' kan daarom niet los worden gezien van de vraag: 'Wat hebben de leerlingen *nu* aan reken-wiskundige bagage nodig? Een vraag waar de werkgroep Wiskunde voor Morgen al jaren aandacht voor vraagt en verder uitgewerkt in de notitie, 'Toekomstgericht reken-wiskundeonderwijs', die is te vinden op,

<https://www.rekenenwiskunde21.nl> <https://www.rekenenwiskunde21.nl>

PISA Mathematics Framework

In deze bijdrage gebruiken we het Mathematics Framework 2021², dat de inhoudelijke verantwoording vormt voor de internationale PISA-studie, als kader om na te denken over welke reken-wiskundige bagage de leerlingen nodig hebben om in de huidige en de toekomstige maatschappij te kunnen floreren. In het Mathematics Framework 2021 wordt expliciet rekening gehouden met de veranderingen die in de wereld plaatsvinden:

In recent times, the digitisation of many aspects of life, the ubiquity of data for making personal decisions involving initially education and career planning, and, later in life, health and investments, as well as major societal challenges to address areas such as climate change, governmental debt, population growth, spread of pandemic diseases and the globalising economy, have reshaped what it means to be mathematically competent and to be well equipped to participate as a thoughtful, engaged, and reflective citizen in the 21st century. (PISA 2021 Mathematics Framework blz. 3.)

Dat er bij de PISA-onderzoekers aandacht is voor de digitalisering van de maatschappij heeft te maken met het feit dat hun doel is om vast te stellen of 15-jarige leerlingen, *wat ze weten en kunnen, creatief kunnen toepassen in nieuwe situaties*. Men spreekt in dit verband van mathematical literacy, dat wordt gedefinieerd als,

the capacities of individuals to *reason mathematically and use mathematical concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena*. (blz. 6; cursief origineel)

Daarbij wordt gekeken naar toepassingen

- in de persoonlijke levenssfeer,
- in beroep en maatschappij en
- in wetenschappelijke contexten – inclusief de wiskunde zelf.

In al deze toepassingssituaties speelt digitalisering een rol. Dit betekent dat de in de definitie genoemde tools en procedures in de praktijk vaak digitale tools en procedures zijn.

Digitale tools komen expliciet aan de orde bij de thema's, mathematical modelling, mathematical reasoning en computational thinking.

Mathematical modelling

Het doel van het Framework is om uit te werken, wat een en ander betekent in termen van toetsen. Daarbij is de gedachte dat het bij het maken van opgaven in de kern gaat om *wiskundig modelleren*, waarin de vier stappen kunnen worden onderscheiden die we onder punt 1 noemden. In het PISA Mathematics Framework wordt in de tweede stap - het oplossen van het reken-wiskundig probleem - ruimte gecreëerd om de digitale hulpmiddelen en rekenapparaten te gebruiken die aansluiten bij wat gangbaar is in de wereld van vandaag.

Immers,

Computer-based mathematical tools are in common use in workplaces of the 21st century, and will be increasingly more prevalent as the century progresses both in the workplace and in society generally. The nature of day-to-day and work-related problems and the demands on individuals to be able to employ mathematical reasoning (both deductive and inductive) in situations where computational tools are present has expanded with these new opportunities – creating enhanced expectations for mathematical literacy. (blz. 12)

² <https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa-2021-mathematics-framework-draft.pdf>

In de vertaling naar de toets zal enige terughoudendheid worden betracht, omdat de PISA-toetsen uiteraard niet te ver vooruit kunnen lopen op het onderwijs in de deelnemende landen. Tegelijkertijd kunnen we ervan uitgaan dat het gebruik van digitale hulpmiddelen in de PISA-toets in de toekomst zal toenemen.

Interessant is in dit verband de stellingname van Conrad Wolfram³. Hij wijst erop dat in het huidige onderwijs de tweede stap - het oplossen van het reken-wiskundige probleem - centraal staat, waarbij de berekeningen met pen en papier worden uitgevoerd, terwijl het juist die stap is die in de wereld buiten de school door apparaten wordt overgenomen. Het onderwijs zou daarom de andere drie stappen meer nadruk moeten geven en het rekenwerk zoveel mogelijk aan apparaten moeten overlaten.

Mathematical reasoning

De auteurs van het Framework wijzen erop dat ‘mathematical reasoning’ in alle stappen van het modelleerproces een rol speelt. Maar, dat mathematical reasoning meer omvat dan het oplossen van toepassingsproblemen. Het speelt ook een rol bij het vormen van gefundeerde oordelen over maatschappelijke onderwerpen die wiskundig kunnen worden benaderd en het oordelen over de informatie die ons via allerlei kanalen bereikt. Verder wordt opgemerkt dat wiskundig redeneren en modelleren niet zonder een stevige inzichtelijke reken-wiskundige basis kunnen.

Computational thinking

Met het oog op de digitalisering van de maatschappij wordt ook een belangrijke rol toegekend aan ‘computational thinking’:

The increasing and evolving role of computers and computing tools in both day-to-day life and in mathematical literacy problem solving contexts is reflected in the recognition in the PISA 2021 framework that students should possess and be able to demonstrate computational thinking skills as they apply to mathematics as part of their problem-solving practice. (blz. 5)

Uiteraard zijn er meer onderwerpen die heroverwogen zouden moeten worden. Het Framework noemt er nog een paar en we kunnen een uitgebreid overzicht vinden in de eerdergenoemde notitie van de werkgroep Wiskunde voor Morgen. De zojuist besproken voorbeelden zijn echter vooral bedoeld om te illustreren dat de digitalisering van de maatschappij consequenties heeft voor de doelen van het reken-wiskundeonderwijs. Dit ter onderbouwing van onze stelling dat de vraag, ‘Wat is nodig om de beheersing van het rekenen te verhogen?’, niet los kan worden gezien van de vraag, ‘Wat hebben de leerlingen *nu* aan reken-wiskundige bagage nodig?’

3. Permanente onderwijsinnovatie als incrementeel proces

Als derde punt bespreken we de vraag hoe deze onderwijsverbetering zou moeten worden vormgegeven. Een eenmalige actie lijkt hier niet het meest geschikte aanpak. We pleiten ervoor te kiezen voor onderwijsverbetering als een permanent proces, om twee redenen. In de eerste plaats zijn de eisen die de maatschappij stelt voortdurend aan verandering onderhevig. In de tweede plaats willen we pleiten voor een geleidelijk proces dat zich richt op een opeenvolging van incrementele veranderingen. Daarbij zal er rekening mee moeten worden gehouden dat de

³ Conrad Wolfram is een van de CEO's van een internationale firma die softwaretools maakt voor het uitvoeren van wiskundige berekeningen.

leraren de spil zijn in dit veranderingsproces. Een voorwaarde voor een succesvolle innovatie is dat de leraren zich ‘eigenaar’ van de verandering kunnen voelen. We pleiten daarom voor *‘Onderwijsverbetering als een permanent proces waarin steeds een balans wordt gezocht tussen kennis van ontwikkelingen in maatschappij en wetenschap enerzijds en ervaringen en wensen van de onderwijspraktijk anderzijds.’*

Het ligt voor de hand om hier gebruik te maken van een *lesson-study* model. Het idee achter lesson studies is dat een groep leraren onder leiding van een coach experimenteert met veranderingen in het onderwijs. Op basis van input van experts worden gezamenlijk lessen ontworpen. Deze worden dan door één van de deelnemers uitgevoerd, waarbij de andere deelnemers komen observeren. Daarna worden de ervaringen besproken en wordt de les verbeterd. In Nederland is de nodige kennis over het lesson-study model. Zo zijn er een aantal projecten op het gebied van het reken-wiskundeonderwijs die het lesson-study model, of een variant daarvan gebruiken:

- LESSAM project dat zich richt op verbetering van leerprestaties in wiskunde,
- TTP-LS project dat zich richt op problem solving,
- PILA project dat zich richt op computational denken.

De geschetste opzet veronderstelt een continue monitoring van wat de maatschappij en het vervolgonderwijs vragen. Er zal moeten worden bepaald of en welke consequenties deze ontwikkelingen hebben voor de doelen van het reken-wiskundeonderwijs. Uiteraard ligt het voor de hand leraren en andere onderwijsexperts daarbij te betrekken. In samenhang daarmee zullen concept leergangen en onderwijsmaterialen moeten worden ontwikkeld die input kunnen vormen voor de lesson-study groepen welke hun ervaringen en ideeën weer terugkoppelen. Op eenzelfde manier kunnen wetenschappelijke ontwikkelingen worden vertaald naar praktische uitwerkingen die worden getoetst op hun bruikbaarheid.

Aanvullende literatuur

Conrad Wolfram (2020) *The Math(s) Fix: An Education Blueprint for the AI Age*. Wolfram Media Inc.

Maya Bialik, Emma Smith Zbarsky, Tina Cardone, Charles Fadel (2021). *Mathematics for the Modern World: Standards for a Mathematically Literate Society*. Center for Curriculum Redesign. <https://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Mathematics-for-the-Modern-World.pdf>