**Een internationaal perspectief op reken- en wiskundeonderwijs** **Nr.2**

In de internationale literatuur op het gebied van het reken- en wiskundeonderwijs staat het het specifieke karakter van rekenen en wiskunde centraal. Deze literatuur laat zien dat dit vak heel specifieke eisen stelt aan het onderwijs. In deze reeks wil de werkgroep Wiskunde voor Morgen dit internationale perspectief voor het voetlicht brengen aan de hand van toonaangevende internationale artikelen.

In deze bijdrage betreft dit Gray & Tall (1994).

# Gray en Tall (1994), Van tellen naar getallen-als-objecten

Koeno Gravemeijer en Frans van Galen, Werkgroep Wiskunde voor Morgen

Gray en Tall (1994) stellen zich tot doel om uit te vinden hoe het komt dat wiskunde voor sommigen eenvoudig is terwijl het voor anderen onvoorstelbaar moeilijk is. Zij vermoeden dat de oorzaak zit in de manier waarop je wiskundige ideeën ontwikkelt. Hun verklaring is dat het sommigen lukt om wiskundige procedures te verkorten en in een groter geheel onder te brengen, terwijl anderen een verzameling opbouwen van procedures die die min of meer op zichzelf staan. Voor de eersten is wiskunde eenvoudig, voor de anderen wordt wiskunde heel lastig.
We gebruiken het woord 'wiskundig' hier op dezelfde manier op als Gray en Tall, die het woord 'mathematics' ook gebruiken wanneer wij zouden spreken van 'rekenen' of 'rekenen-wiskunde'. In dit artikel gaan we er steeds van uit dat 'wiskunde' ook het 'rekenen' omvat.

Gray en Tall (1994) illustreren hun ideeën aan de hand van het leren optellen en aftrekken in het aanvankelijk rekenen. In deze fase maken leerlingen een overgang van tellen naar rekenen, waarbij ze gaandeweg steeds meer relaties tussen getallen gaan leggen. 'Acht', bijvoorbeeld, is op een gegeven moment niet alleen een getal in de telrij, maar ook een getal dat zich verhoudt tot andere getallen, zoals in 'acht is vier en vier' en 'acht en twee is tien'. Gray en Tall merken op dat het getal acht nu een object is geworden waarover je kunt redeneren. Daarmee is dit een voorbeeld van wat in de literatuur wordt aangeduid als een overgang van een *wiskundig proces* (tellen) naar een *wiskundig object* (het getal acht).
Ze benadrukken daarbij dat het getal-als-object object verbonden moet blijven met zijn oorsprong, het tellen. Om het belang van de samenhang tussen processen en objecten tot uitdrukking brengen introduceren ze de term '*proce*pt' als samentrekking van 'proces' en 'object'.
Hun analyse van het leren optellen en aftrekken laat zien welke elementen een rol spelen in de overgang van proces naar procept:

- verkorten van procedures,
- symboliseren,
- introduceren van notaties, en
- generaliseren over verschillende contexten,
- het leggen van relaties.

Gray en Tall vullen deze analyse aan met een onderzoek naar rekenen onder 20, waarin ze de oplossingsmanieren van sterke en zwakke rekenaars met elkaar vergelijken. Het blijkt dat 'proceptual thinking' de bepalende succesfactor is. De sterke rekenaars gebruiken proceptual thinking, terwijl de zwakkere rekenaars steeds telprocedures hanteren.

In hun afsluiting betogen Gray en Tall ten slotte dat proces-proceptovergangen bij allerlei wiskundige begrippen een rol spelen en ze onderbouwen dit met een reeks van voorbeelden.

***De vorming van getallen als object***

Optellen begint met het samennemen van twee groepjes concrete dingen, zoals bijvoorbeeld 8 blokjes en 4 blokjes. Om te bepalen hoeveel dat er samen zijn, wordt eerst ieder groepje geteld, bijvoorbeeld, '1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8' en '1, 2, 3, 4' en daarna wordt het totaal geteld, '1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12'. Men noemt deze procedure wel 'hertellen'. Na verloop van tijd gaan de leerlingen inzien dat je vanaf '8' door kunt tellen, '9, 10, 11, 12'. Eerst doen ze dit met concreet materiaal, later kunnen ze dit ook zonder materiaal. Ze moeten dan wel bijhouden wat ze erbij hebben geteld, 'erbij 1 is 9', 'erbij 2 is 10', 'erbij 3 is 11', 'erbij 4 is 12'. Wanneer ze meer ervaring opdoen met het splitsen, samennemen, afhalen en vergelijken van hoeveelheden, worden bepaalde getalrelaties echter weetjes, bijvoorbeeld: '4 = 2 + 2' en '8 + 2 = 10'. Het optellen kan dan nog verder worden verkort door deze getalrelaties te gebruiken voor redeneringen als, '8 + 4 = 8 + 2 + 2 = 10 + 2 = 12'.

De getallen zijn nu objecten geworden, in de zin dat ze niet meer verbonden zijn met het tellen van bepaalde concrete dingen als knikkers of blokjes. De getallen-als-objecten zijn in plaats daarvan verbonden met andere getallen. Je kunt in dit verband spreken van getallen in een netwerk van getalrelaties. Voor '8' geldt bijvoorbeeld, 8 = 4 + 4, 8 = 5 + 3, 8 + 2 = 10, 8 − 1 = 7, 8 + 8 = 16, ... Ook kunnen we bepaalde kenmerken aan deze getallen onderscheiden; ze zijn even of oneven, het zijn wel of geen priemgetallen, wel of niet deelbaar door 3 enz. De getallen hebben daarmee een ander karakter gekregen dan de getallen die gebonden waren aan concrete groepjes, het zijn echt zelfstandige dingen geworden. Voor jonge kinderen voor wie getallen nog gebonden zijn aan concrete groepjes, heeft de vraag, 'Hoeveel is 8 en 4?', geen betekenis. Die kinderen zullen vragen, 'Acht wat?'
Gray en Tall benadrukken dat getallen-als-objecten verbonden blijven met de processen waaruit ze zijn ontstaan. In wezen, zo betogen ze, zijn deze aspecten niet te scheiden. Hun begrip *'procept'* - als samentrekking van proces en object - benadrukt dat.

Terugkijkend op de ontwikkeling die Gray en Tall beschrijven kunnen we een aantal elementen aanwijzen die bij de proces-objectovergang een rol spelen. Zo zien we dat de procedures steeds verder worden *verkort*. Van hertellen, via doortellen met en zonder materiaal, naar het gebruik van getalrelaties. Ook zien we dat verschillende vormen van *symboliseren en noteren* de objectvorming ondersteunen. Eerst gaat het om concrete voorwerpen. In een overgangsfase worden vervolgens zaken als appels of ijsjes met fiches of stippen voorgesteld. Dan worden de cijfersymbolen ingevoerd en volgt de formele somnotatie. Belangrijk is verder het *generaliseren*. Dit betreft het generaliseren over verschillende contexten. Of je nu 8 + 4 appels, ijsjes, blokjes of meters optelt, komt er niet alleen steeds 12 uit. Het bepalen van de uitkomst via doortellen verloopt steeds op dezelfde manier, '8', 'erbij 1 is 9', 'erbij 2 is 10', 'erbij 3 is 11', 'erbij 4 is 12'. De relatie '8 + 4 is 12', komt zo los te staan van de individuele gevallen.

De *vorming* van dergelijke *relaties*, zorgt er uiteindelijk voor dat getallen wiskundige objecten worden die verbonden zijn met andere getallen/objecten. Wanneer leerlingen over een ruim repertoire van getalrelaties beschikken, kunnen zij die op allerlei manieren inzetten. Zo kan de opgave 6 + 7 op verschillende manieren worden opgelost; via 6 + 6 = 12 dus 6 + 7 = 13, of via 7 + 7 = 14 dus 6 + 7 = 13, of via 6 + 4 = 10 dus 6 + 7 = 10 + 3 = 13. Anders gezegd, de leerlingen kunnen getallen naar believen splitsen of samenvoegen.

Dit heeft consequenties voor het aftrekken. Vaak wordt verondersteld dat leerlingen op een gegeven moment zien dat optellen en aftrekken elkaars tegengestelde (inverse) zijn; dat 8 + 5 = 13 bijvoorbeeld betekent dat 13 – 5 = 8 is. Als we uitgaan van flexibiliteit in het splitsen en samenvoegen ontstaat echter een ander beeld. Splitsen en samenvoegen zijn dan zo nauw met elkaar verbonden dat aftrekken gewoon neerkomt op een flexibele reorganisatie van optelkennis. Anders gezegd, als je weet dat 8 + 5 = 13 is, weet je ook dat 13 – 5 = 8 is.

Het onderzoek dat we straks bespreken laat zien dat er ook verschillen zijn bij het tellend oplossen van aftrekopgaven. Hier zijn twee oplossingen mogelijk, terugtellen en doortellen. Bij 13 – 5 = … kun je terugtellen vanaf 13, maar je kunt ook doortellen vanaf 8. Het laatste is een stuk eenvoudiger. Uit het onderzoek blijkt dat de zwakkere rekenaars – die veel tellen – systematisch voor terugtellen kiezen. Terwijl de sterke rekenaars meestal voor doortellen kiezen, tenzij de verschillen heel klein zijn.

Gray en Tall wijzen er in hun analyse verder op dat de sterkere leerlingen hun voorsprong steeds meer vergroten. Het combineren van bekende rekenfeiten tot nieuwe rekenfeiten leidt ertoe dat de betere leerlingen hun netwerk van getalrelaties steeds verder uitbreiden. Terwijl de zwakkere leerlingen daarentegen vastlopen in uitgebreid telwerk.

***Onderzoek***
Gray en Tall voerden een onderzoek uit waarin werd vergeleken hoe zwakke en sterke rekenaars berekeningen onder de 20 uitvoerden. Hier bleek dat de betere leerlingen regelmatig hen bekende getalrelaties gebruikten om antwoorden op opgaven te vinden. Zoals bijvoorbeeld, '4 + 7 is 11 omdat 3 en 7 10 is'; '18 – 9 is 9 omdat 9 x 2 18 is'; '8 + 6 is 14 omdat twee zevens 14 zijn'. Soms ook losten ze opgaven op met doortellen. Ze lieten daarmee zien dat ze flexibel konden wisselen tussen de statische objectkant en de dynamische proceskant van getallen.

De zwakkere leerlingen konden dit niet. Zelfs als ze over getalrelaties beschikten die ze hadden kunnen inzetten, deden ze dit niet. Het beheersen van de meer basale getalrelaties, die ook uit het hoofd geleerd kunnen worden, blijkt niet voldoende. Dit kan weliswaar worden opgelost door het leren van aanvullende regels, maar dat maakt het rekenen alleen maar complexer terwijl *'proceptual thinking'* het rekenen juist makkelijker maakt. De leerling die procedureel denkt wordt bovendien steeds geconfronteerd met nieuwe procedures, voor, 'resultatief tellen', 'optellen', 'aftrekken', 'vermenigvuldigen', enz. De leerlingen die proceptueel denken zien een doorgaande lijn. Voor hen zijn het verschillende varianten van het werken met getallen als objecten die je flexibel kunt splitsen of combineren.

Dit voordeel van proceptueel denken geldt volgens de onderzoekers niet alleen het rekenen maar ook voor tal van andere wiskundige concepten. Zij noemen als voorbeeld uit de algebra dat leerlingen die procedureel denken niet uit de voeten kunnen met een expressie als 2 + 3x. De optelling kan immers niet worden uitgevoerd als de waarde van x niet bekend is. In trigonometrie ontstaan problemen wanneer sinus, cosinus en dergelijke alleen worden gezien als een rekenprocedure – zoals bijvoorbeeld, 'de overstaande zijde delen door de hypotenusa'. In beide gevallen blijkt overigens dat wanneer de leerlingen de berekeningen met computers kunnen uitvoeren, objectvorming gemakkelijker gaat. Dit geldt ook voor het functieconcept. Waar het proces de betekenis als een rekenvoorschrift betreft en de betekenis als een object naar de samenhang tussen twee variabelen verwijst. De laatste 'dualiteit' is vooral bekend uit het werk van Sfard (1991), waar we in een eerdere bijdrage aandacht hebben besteed (*Een internationaal perspectief #1).*

### *Conclusies*

De analyse van Gray en Tall laat zien dat het optellen binnen het aanvankelijk rekenen verloopt van hertellen, naar doortellen (met en zonder materiaal), naar het gebruik van getalrelaties. Daarmee schetsen zij hoe wiskundige objecten voortkomen uit wiskundige processen: Procedures worden steeds verder verkort. Er worden verschillende vormen van symboliseren en noteren geïntroduceerd die de objectvorming ondersteunen. De getallen-als-objecten worden verbonden met andere getallen en een breder netwerk van betekenissen. De betekenis van de getallen en de relaties daartussen worden gegeneraliseerd. Tegelijkertijd blijven de getallen verbonden met het tellen. Gray en Tall introduceren het woord 'procept' om de nauwe band tussen proces en object te benadrukken.
Wanneer leerlingen zich dit procept-karakter van getallen eigen hebben gemaakt kunnen ze proceptual thinking inzetten om rekenopgaven onder de 20 op te lossen. De opgave 6 + 7, bijvoorbeeld, kan dan op verschillende manieren worden opgelost; via 6 + 6 = 12 dus 6 + 7 = 13, of via 7 + 7 = 14 dus 6 + 7 = 13, via 6 + 4 = 10 dus 6 + 7 = 10 + 3 = 13, of door vanaf 7 zes verder te tellen. Door hen uitgevoerd onderzoek laat zien dat dit precies is wat de meer rekenvaardige leerlingen ook doen. De leerlingen die minder vaardig zijn doen dit niet, zij lopen vast in uitgebreid telwerk. Zelfs getalrelaties die ze wel kennen zetten ze niet flexibel in.

De auteurs concluderen dat proceptual thinking wiskunde een stuk eenvoudiger maakt. Wanneer concepten alleen gezien worden als procedures maakt dat de wiskunde juist heel complex. Ze betogen dat dit ook geldt voor andere wiskundige concepten en noemen in dit verband, algebra, trigonometrie en functies.

Interessant is ten slotte de constatering dat de beoogde procept-vorming kan worden bevorderd, wanneer de leerling het rekenwerk kan uitbesteden aan een computer.

### *Literatuur*

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A 'proceptual' view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, *25*(2), 116-140.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36

Een overzicht van de verschillende manieren waarop wiskunde-didactici de vorming van wiskundige objecten beschrijven, is te vinden in:
Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 223-241.