Toekomstgericht reken-wiskundeonderwijs

Werkgroep Wiskunde voor Morgen

Toekomstgericht reken-wiskundeonderwijs

Werkgroep Wiskunde voor Morgen

Koeno Gravemeijer
Frans van Galen

Met medewerking van:
Geeke Bruin-Muurling, Nelleke den Braber, Michiel Doorman, Dolly van Eerde, Kees Hoogland, Ronald Keijzer, Zeger-Jan Kock, Peter Kop, Wil Oonk, Sonia Palha, Irene van Stiphout, Marc van Zanten, Bert Zwaneveld

Layout: Frans van Galen
Omslagfoto: ThisisEngineering RAEng

September 2020
(aangepast 1.11.2020)
www.rekenenwiskunde21.nl

NVORWO

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Inhoud

Voorwoord

Er ontstaat een steeds grotere kloof tussen wat het reken-wiskundeonderwijs biedt en wat de maatschappij vraagt. Terwijl de rol van rekenen-wiskunde in de maatschappij door computerisering en informatisering in hoog tempo verandert en steeds meer reken-wiskundige taken door computers worden overgenomen, werken deze veranderingen nauwelijks door in het reken-wiskundeonderwijs.

De vraag hoe het reken-wiskundeonderwijs zou moeten worden aangepast om de leerlingen van nu adequaat voor te bereiden op onze hoogtechnologische maatschappij, staat al jaren op de agenda van de werkgroep Wiskunde voor Morgen (WvM) – een gezamenlijke werkgroep van de Nederlandse Vereniging voor de Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) en van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW).

De werkgroep beperkt zich daarbij niet tot het denken over reken-wiskundedoelen, maar probeert ook de discussie daarover aan te zwengelen. Deze notitie moet in dat licht worden gezien. We doen een beargumenteerd voorstel voor door ons noodzakelijk geachte wijzigingen voor het funderend onderwijs. Daar is uiteraard discussie over mogelijk en we hopen ook dat die er komt. De notitie is bedoeld om als katalysator te dienen voor een brede discussie over reken-wiskundeonderwijs dat leerlingen voorbereidt op participatie in de maatschappij van nu en morgen.

De activiteiten van de werkgroep liepen, tot zekere hoogte, parallel aan die van het ontwikkelteam rekenen & wiskunde van curriculum.nu. We hebben actief meegedacht, commentaar geleverd en naar ons idee ook wel invloed gehad. Onze notitie is echter geen reactie op de voorstellen van curriculum.nu. Deze notitie is het resultaat van een al langer lopend project en ook het doel is anders. Het doel is niet een directe vertaling in richtlijnen, maar het entameren van een brede discussie waaraan, naast leraren, beleidsmakers, lerarenopleiders en andere onderwijsexperts ook andere groepen uit de maatschappij deelnemen, zoals ouders, ondernemers, vakbonden en wetenschappers uit andere disciplines.

Koeno Gravemeijer
Voorzitter werkgroep Wiskunde voor Morgen

1. Inleiding en overzicht

Doordat steeds meer reken-wiskundige bewerkingen door computers worden uitgevoerd, is er een kloof ontstaan tussen het onderwijs en de wereld waar het onderwijs voor opleidt. Stephen Keeler, hoofd van de ‘Applied Mathematics Group’ van Boeing, omschrijft de kloof als volgt:

> ‘In school the professor formulates the problem and you solve it— you hope. In industry, you formulate the problem and the software solves it— you hope.’

In onze hoogtechnologische maatschappij hebben veel meer mensen dan vroeger reken-wiskundige kennis nodig om zinvol te kunnen participeren. Daarbij gaat het echter grotendeels om andere reken-wiskundige kennis dan nu wordt onderwezen. In het huidige onderwijs ligt het accent op vaardigheden die concurrerend zijn met wat computers kunnen, maar de maatschappij vraagt om reken-wiskundige kennis die complementair is aan wat computers bieden.

Dit leidt tot de vraag: ‘Welke reken-wiskundige kennis, en welke vaardigheden heeft iemand nodig in een samenleving waar computers het reken-wiskundewerk op allerlei manieren van ons overnemen?’ In het verlengde hiervan ligt de vraag, hoe de doelen van het reken-wiskundeonderwijs moeten veranderen om leerlingen hierop voor te bereiden.

In deze notitie probeert de werkgroep Wiskunde voor Morgen een eerste antwoord op deze vraag te formuleren. Daarbij richten wij ons op het funderend onderwijs - po, vmbo en onderbouw havo/vwo - omdat hier voor iedereen de basis wordt gelegd en omdat de grootste veranderingen in werk en werkgelegenheid plaatsvinden in het middensegment van de arbeidsmarkt. We beperken ons bovendien tot de vraag wat de bovengenoemde veranderingen in de maatschappij voor consequenties moeten hebben. Bij de keuze van curriculumdoelen voor het funderend onderwijs spelen uiteraard ook andere overwegingen een rol, zoals de voorbereiding op vervolgonderwijs en de culturele en historische waarde van de wiskunde. Verder is ook afstemming nodig met de ontwikkelingen binnen verwante vakken op het gebied van de natuurwetenschappen, techniek en economie. Ten slotte zullen we ook de - in deze tijd actuele - vraag, hoe in het reken-wiskundeonderwijs rekening kan worden gehouden met culturele en andere verschillen, buiten beschouwing laten, omdat deze het bestek van deze notitie overstijgt.

Dit levert de volgende uitgangspunten voor aanpassingen, die we in het vervolg zullen toelichten:

- *Modelleren en het gebruiken van modellen*
  Nu apparaten veel van het uitvoerende werk overnemen moet er in het onderwijs meer aandacht komen voor het vertalen van problemen uit de werkelijkheid naar problemen die met wiskundige middelen kunnen worden aangepakt (hoofdstuk 2).

- *Globaal rekenen en kwalitatief wiskundig redeneren*
  Wanneer we het rekenwerk aan apparaten overlaten moeten we kunnen controleren of de uitkomsten kloppen. Dit vraagt om specifieke reken-wiskundige vaardigheden (hoofdstuk 3).

- *Begrijpen; doorgaande leerlijnen gericht op inzicht*
  In meer algemene zin is een verschuiving nodig van het leren van routines naar het ontwikkelen van inzicht. Dit vraagt om het ontwikkelen van andersoortige, doorgaande leerlijnen (hoofdstuk 4).

- *Inperking*
  De beschikbaarheid van apparaten maakt pen-en-papier-procedures voor omvangrijke berekeningen minder belangrijk. De grote hoeveelheid onderwijstijd die hier nu aan wordt besteed kan anders worden ingezet (hoofdstuk 5).

- *Statistiek*
  De toenemende digitalisering van informatie maakt dat statistiek en data-analyse een steeds grotere rol gaan spelen in onze maatschappij. Dit betekent dat statistiek meer aandacht moet krijgen in het onderwijs (hoofdstuk 6).

- *Variabelen en functies*
  In de modellen waar computers mee werken gaat het altijd om de samenhang tussen bepaalde variabelen. Daarmee groeit het belang van het onderwerp functies en variabelen in het onderwijs (hoofdstuk 7).

- *Algoritmiseren en computational thinking*
  De omgang met computers veronderstelt ook een zeker begrip van de structuur van computerprogramma's. Dit vraagt om aandacht voor zaken als algoritmiseren en computational thinking (hoofdstuk 8).

- *Meten en meetkunde*
  Digitalisering van informatie impliceert dat steeds meer fenomenen in de werkelijkheid worden gekwantificeerd. Het meten moet daarom worden uitgebreid naar gebieden als economie, milieu en dergelijke. Daarnaast vraagt de groeiende rol van 3D-printing, CAD/CAM en robotica extra aandacht voor 3D-meetkunde (hoofdstuk 9).

- *21st century skills*
  De roep om 21st century skills onderstreept het belang van activiteiten als probleem oplossen, kritisch denken en communiceren. Deze maken van oudsher deel uit van het vak maar vereisen meer aandacht (hoofdstuk 10).

- *Digitale tools*
  Het gebruik van digitaal gereedschap dient aandacht te krijgen in het reken-wiskundeonderwijs. Dit betreft zowel, het leren gebruiken van digitale tools, als het gebruik van apparaten en software om het leren te ondersteunen (hoofdstuk 11).

2. Modelleren en het gebruiken van modellen

Met de groeiende digitalisering van de maatschappij groeit ook het belang van het kunnen vertalen van problemen uit de werkelijkheid naar reken-wiskundige bewerkingen. Dit speelt zowel in beroepssituaties als in het persoonlijk leven (zoals bijvoorbeeld bij beslissingen over gezondheid of financiën), en ook in het functioneren als betrokken burger (bijvoorbeeld als het gaat om meedenken over allerlei maatschappelijke en politieke zaken). De ruime beschikbaarheid van computerkracht maakt bovendien dat er complexere problemen kunnen worden aangepakt, waarbij probleemoplossen het karakter krijgt van reken-wiskundig modelleren. Bovendien maken computers dynamische modellen mogelijk waarmee we verschijnselen in de werkelijkheid kunnen simuleren, data kunnen analyseren, of apparaten kunnen aansturen.

Vertalen

Toepassen van rekenen-wiskunde vraagt altijd om het vertalen van de situatie in reken-wiskundetermen. Neem een simpele opgave als:

> Een pak koffie kost €3,59. De supermarkt biedt drie pakken voor € 9.95 aan. Wat is je voordeel?

Die vraag kan worden beantwoord door de situatie te vertalen naar de vermenigvuldiging 3 × 3,59 en de uitkomst daarna weer terug te vertalen naar de situatie: drie pakken kosten € 10,77, het voordeel is dus € 10,77 - € 9,95 = € 0,82. Zo'n vertaalslag is echter lang niet altijd triviaal, zelfs niet als het om eenvoudige bewerkingen gaat. Neem de volgende opgave:

> Een vrachtwagen rijdt met een snelheid van 75 km per uur. Hoe lang doet de vrachtwagen over een afstand van 500 kilometer?

Veel leerlingen lossen dat op via proberenderwijs herhaald aftrekken (500 – 75 = 425, 425 – 75 =... enz.) omdat ze in de beschreven situatie geen deling herkennen.

Het wordt ingewikkelder als er een aantal bewerkingen moet worden uitgevoerd, zoals in het onderstaande voorbeeld.

Voorbeeld: Omrijden

Je woont vlak bij de grens. In Nederland kost de benzine op een bepaald moment € 1,60 per liter en over de grens in België kost hij € 1,35. Je hebt een auto die 1 op 15 rijdt en een tank heeft van 40 liter. Het dichtstbijzijnde benzinestation in België is 30 kilometer verder dan het dichtstbijzijnde Nederlandse tankstation. Is het lonend om in België te gaan tanken?

Modelleren betekent hier dat je moet bedenken hoe de situatie in elkaar steekt. Het voordeel zit in het aantal goedkope liters benzine dat je overhoudt, nadat je naar het Belgische tankstation op en neer bent gereden. De kosten worden bepaald door de hoeveelheid benzine die je nodig hebt om op en neer te rijden.

Om het probleem hanteerbaar te maken, gaan we ervan uit dat de tank precies leeg is als je bij het tankstation aankomt. Je kunt dan 40 liter tanken. Als je thuis komt heb je daar 2 liter van verbruikt en dus 38 liter over. Maar als je er een gewoonte van maakt om steeds in Belgie te tanken, moet je 2 liter overhouden om weer naar het tankstation te rijden. Dus je houdt 36 liter over voor dagelijks gebruik.

Door het prijsverschil van € 0,25 is je winst op die 36 liter €9,00, want 36 × € 0,25. Daar moeten dan nog wel de benzinekosten van het heen- en terugrijden vanaf, dus het netto voordeel is €9,00 - 4 × € 1,35 = € 3,60.

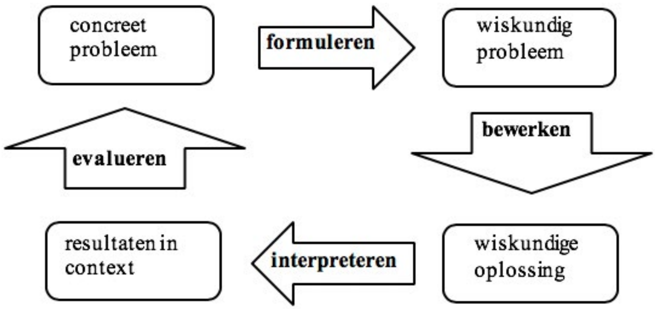
Het probleem wordt interessanter wanneer de afstand tot het dichtstbijzijnde Belgische tankstation niet gegeven is en de vraag is: Wanneer is het lonend om in België te gaan tanken?

Een strategie van 'trial-and-error' is dan een mogelijkheid, maar fraaier is het dan om het probleem algebraïsch te modelleren. Je kunt de afstand tot het tankstation x noemen. Heen- en terugrijden kost $2x \times \frac{1}{15}$ liter , dus $\frac{2}{15}x$ liter benzine. Je maakt $(40 - \frac{2}{15}x) \times$ € 0,25 winst, maar er moet nog $\frac{2}{15}x \times$ € 1,35 aan benzinekosten af. Voor de maximumafstand - dat wil zeggen dat je er niets aan overhoudt - geldt dan: $((40 - \frac{2}{15}x) \times$ € 0,25) - ($\frac{2}{15}x \times$ € 1,35) = 0. Dat geeft voor x, de maximale afstand, 46,875 km.

Modelleercyclus

Bij complexere situaties is er vaak sprake van een cyclisch proces dat bestaat uit de stappen: formuleren, bewerken, interpreteren en evalueren.

De eerste fase betreft het vertalen van een ambigue, rommelige, situatie in een beschrijving die toegankelijk is voor een reken-wiskundige aanpak. In de tweede fase gaat het om het met reken-wiskundige middelen oplossen van het probleem. De derde en vierde fase betreffen het terugvertalen van de oplossing naar de oorspronkelijke context en het beoordelen van de kwaliteit en bruikbaarheid van de oplossing. Als deze onvoldoende is kan een nieuwe cyclus worden gestart.



modelleercyclus

Bij het modelleren moeten altijd bepaalde aannames worden gedaan. Vaak is het ook handig om de getallen waarmee gerekend wordt te vereenvoudigen. In het volgende voorbeeld zijn deze stappen te herkennen.

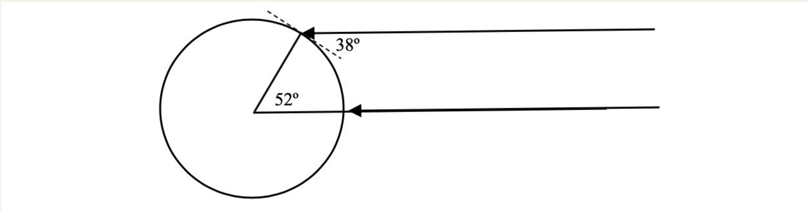
Voorbeeld: waarom is het warmer rond de evenaar?

Wanneer gevraagd wordt waarom het in landen rond de evenaar warmer is dan bij ons geven veel mensen als antwoord: omdat de evenaar dichter bij de zon is. Het onderliggend idee is dat de intensiteit van de zonnestralen afneemt met de afstand tot de zon. Als we dat model zouden willen ondersteunen met een berekening komen we op:

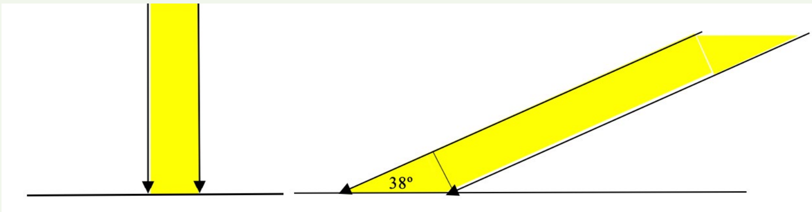
- De diameter van de aarde is 12.742 km, de straal is 6.371 km. We mogen aannemen dat het verschil in afstand tot de zon voor onze breedtegraad en de evenaar minder is dan 6.000 km.
- De afstand van de aarde tot de zon is ongeveer 150.000.000 km.

- Het gaat dus grofweg om een verschil van 6.000 km op de totale afstand van 150.000.000 km. Dat is ongeveer 6.000/150.000.000 deel, ofwel 4/100.000 deel van de afstand tussen aarde en zon. Dat kan het verschil in temperatuur niet verklaren.

Een betere verklaring is dat de hoek waaronder het zonlicht op de aarde valt verschilt. Het model is dan gebaseerd op de veronderstelling dat de temperatuur omgekeerd evenredig is aan de oppervlakte waarover het inkomende zonlicht wordt verdeeld. Ook aan dat model kunnen we rekenen.



- Nederland ligt op de 52e breedtegraad.



Evenaar *Nederland*

- Laten we als voorbeeld uitgaan van de situatie op 21 maart of 21 september. De zon staat dan om 12 uur 's middags loodrecht boven de evenaar, maar bij ons is de hoek van inval 38 graden, een groot verschil.
- We kunnen nog preciezer zijn. Sinus (38°) ≈ 0,616. De oppervlakte is 1 : 0,616 ≈ 1,62 keer zo groot. Het invallende zonlicht wordt dus over een oppervlak verdeeld dat 1,62 keer zo groot is.

Zonder ons te verdiepen in de natuurkundige kant van licht levert dit een verklaring die veel aannemelijker is. Wanneer we het model toetsen aan de werkelijheid blijkt dat meer factoren een rol spelen, waaronder de wolkenvorming, die maakt dat het aan de evenaar iets koeler is dan in de iets noordelijkere en zuidelijkere gebieden. Het model verklaart echter wel waarom het in de tropen en subtropen warmer is dan bij ons.

Bij het maken van een model voor het effect van de hoek van inval van het zonlicht hebben we allerlei vereenvoudigingen aangebracht – zoals het negeren van de invloed van bewolking. Om een meer algemeen model te maken zouden we bovendien de andere dagen in het jaar erbij moeten betrekken en andere plaatsen op aarde. Dit stapsgewijs verbeteren is een kenmerk van veel modelleerprocessen.

Dynamisch modelleren

Het is mogelijk om een computerprogramma te maken dat de theoretische zonnewarmte berekent voor elk tijdstip en voor elke plaats op aarde. We hebben dan een dynamisch model waarbij tijdstip en plaats de input-variabelen zijn en de zonnewarmte de output-variabele is. Het is dit type dynamische modellen dat dankzij de computer een hoge vlucht heeft genomen in onze maatschappij. De input-variabelen kunnen daarbij uit zelfgekozen of theoretische waarden bestaan, maar het kunnen ook meetresultaten zijn. De output kan allerlei vormen aannemen, zoals tabellen en grafieken, maar de output kan ook worden gebruikt om apparaten aan te sturen, zoals bijvoorbeeld robotarmen in een autofabriek.

Gebruiken van de uitkomsten van een model

Buiten bepaalde beroepssituaties zal het zelfstandig uitvoeren van complete modelleercycli niet vaak nodig zijn. We hebben echter veelvuldig te maken met modellen die door anderen ontwikkeld zijn, zowel in beroepssituaties, als bij het lezen van de krant.

Gezien de rol die modelleren in de gedigitaliseerde maatschappij speelt, is het van groot belang dat leerlingen inzicht verkrijgen in wat modelleren inhoudt en er liefst ook zelf enige ervaring mee opdoen. Belangrijk is dat leerlingen zich gaan realiseren dat zulke modellen altijd gebaseerd zijn op vereenvoudigingen.

Voorbeeld: koopkrachtontwikkeling

Als we bijvoorbeeld lezen over de koopkrachtontwikkeling ligt daar een economisch model onder waarvan we de details niet hoeven te kennen, maar we moeten wel uitspraken over de koopkracht kunnen beoordelen. Koopkrachtplaatjes worden in het algemeen uitgewerkt voor verschillende groepen mensen, zoals werkenden, gepensioneerden, en uitkeringsgerechtigden. Bij het interpreteren van die getallen moet je er rekening mee houden dat het gemiddelden zijn. Bovendien moet je je realiseren dat het om voorspellingen gaat; de werkelijke ontwikkeling zal waarschijnlijk verschillen van de voorspelde koopkrachtontwikkeling – bijvoorbeeld omdat lonen en inflatie zich anders ontwikkelen.

Daar komt nog bij dat het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) en het Centraal Planbureau (CPB) met verschillende modellen werken. Het model van het CPB houdt alleen rekening met invloeden van buiten: de ontwikkeling van de cao-lonen, de inflatie en het overheidsbeleid. Het CBS houdt ook rekening met veranderingen in de persoonlijke situatie, zoals een nieuwe baan, samenwonen, scheiden of pensioen.

3. Globaal rekenen en kwalitatief wiskundig redeneren

Het heeft uiteraard grote voordelen om berekeningen over te laten aan apparaten, maar we moeten wel controleren of de uitkomst ongeveer is wat we verwachtten. Dit vraagt zowel een bepaalde houding - uitkomsten niet blind accepteren - als een bepaalde vaardigheid - globaal rekenen, respectievelijk kwalitatief wiskundig redeneren.

Globaal rekenen

Globaal rekenen houdt in dat je een berekening vereenvoudigt door de getallen aan te passen, zodat je via hoofdrekenen kunt controleren of het antwoord juist is. De basis voor globaal rekenen ligt in het flexibel omgaan met getalrelaties, het kunnen rekenen met machten van 10 en het kunnen gebruiken van eigenschappen van rekenoperaties. Omdat die kennis verschilt per persoon zal de manier van rekenen ook vaak verschillen.

Bij een opgave als 27 × 119 kan de ene leerling bijvoorbeeld bedenken dat het antwoord in de buurt ligt van 25 × 120 = 100 × 30 = 3000, terwijl een ander berekent dat het minder moet zijn dan 30 × 120 = 3600. Weer een andere leerling realiseert zich misschien dat je 30 × 120 = 3600 verder kunt verfijnen via 3 × 120 = 360, en komt zo via 3600 - 360 op ongeveer 3240 uit.

Bij het gebruik van eigenschappen van rekenoperaties gaat het om:

- de commutatieve eigenschap (25 × 4 = 4 × 25 = 100),
- de associatieve eigenschap (25 × 120 = 25 × 4 × 30 en 25 × 4 × 30 =100 × 30),
- de distributieve eigenschap (27 × 120 = 30 × 120 – 3 × 120).

Daarbij kan worden opgemerkt dat het eigenschapsrekenen voorbereidt op de algebra.

Het gaat erom dat leerlingen leren om de getalrelaties te gebruiken waar ze vertrouwd mee zijn. Daarbij moeten ze het gevoel hebben dat globaal rekenen ‘mag’ en dat een globaal antwoord waar je zeker van bent meer waard is dan een precies antwoord waar je niet zeker van bent.

Om globaal rekenen mogelijk te maken moet er worden geïnvesteerd in de beheersing van nuttige getalrelaties en in het flexibel omgaan met deze getalrelaties. Bij het vermenigvuldigen kunnen we bijvoorbeeld denken aan het rekenen met veelvouden van 25, 75, 125 en dergelijke, ook waar het gaat om kommagetallen, breuken en procenten. Via het vermenigvuldigen met machten van 10 kunnen we deze getalrelaties uitbreiden in de richting van 2,5 en 0,025, of naar grotere getallen als 250 en 2500. Ook veelvouden van 12 en kwadraten als 12×12, 15×15 en 25×25 bieden geschikte aangrijpingspunten voor globaal rekenen.

Kwalitatief wiskundig redeneren

Het controleren van wiskundige berekeningen vereist inzicht in de structuur van algebraïsche expressies en inzicht in het daarbij horende gedrag van functies. De basis wordt onder meer gevormd door:

- kennis van verschillende soorten functies (lineair, kwadratisch, periodiek, exponentieel, …),
- het daarbij horende inzicht hoe deze functies zich – in hun standaardvorm – gedragen bij variërende invoer. Zoals bijvoorbeeld zichtbaar wordt in de vorm van de grafiek,

  Voorbeeld: $f(x) = \frac{1}{4} x^2 + 10.000x + 100$ Beredeneren dat $f(x)$ voor een heel kleine x ongeveer gelijk is aan 100, dat de lineaire factor 10.000x al snel belangrijker wordt, en dat de waarde van de functie voor een heel grote x kan worden benaderd met $\frac{1}{4} x^2$.

- globaal substitueren, waarbij een samengestelde term wordt vervangen door een letter, en de samengestelde term dus wordt opgevat als één variabele.

  Voorbeeld: $(2x + 4)^2 - 2(2x + 4) + 20 = A^2 - 2A + 20$.

4. Begrijpen; doorgaande leerlijnen gericht op inzicht

Het doel van het reken-wiskundeonderwijs is tweeledig, het ontwikkelen van vaardigheden en het ontwikkelen van inzicht. Daarbij krijgt de vaardighedenkant vaak de meeste nadruk. In deze tijd is er echter een accentverschuiving gerechtvaardigd, omdat veel van het rekenwerk buiten de school inmiddels door computers wordt overgenomen. Ook bij dergelijke taken moet de gebruiker in grote lijnen begrijpen wat de apparaten doen. Tegelijkertijd zijn rekenen en wiskunde een grotere rol gaan spelen in de samenleving. De nadruk in het reken-wiskundeonderwijs zal om deze redenen moeten verschuiven naar het ontwikkelen van inzicht.

Betekenissen en samenhang

Begrijpen houdt in dat je verbanden kunt leggen, dat je iets op verschillende manieren kunt bekijken en dat je zaken aan elkaar kunt relateren. Dit vormt de basis voor het flexibel kunnen omgaan met reken-wiskundige begrippen en procedures; afhankelijk van de situatie heb je soms dit, soms dat nodig. Het gaat om vertrouwdheid met:

- de betekenis van een begrip of procedure binnen een concrete context,
- de betekenis van een begrip of procedure op een meer formeel, reken-wiskundig niveau,
- de relaties tussen de verschillende betekenissen.

Begrijpen betekent dat leerlingen greep krijgen op betekenissen, toepassingen en relaties.

Breuken als voorbeeld

We kunnen dit toelichten aan het onderwerp breuken in het PO. Breuken komen op heel verschillende manieren naar voren in contexten: soms is een breuk het resultaat van een verdeling (vier kinderen verdelen drie pizza's), soms is het een meetgetal (¾ liter melk), soms is het een factor (een tekening verkleinen van A4 naar A5 maakt alle lengtes ongeveer ¾ zo klein) en soms is het puur een getal, zonder context. Leerlingen moeten ervaring opdoen met al die verschillende verschijningsvormen/betekenissen en ze moeten de relaties ertussen gaan begrijpen.

Via het redeneren in contexten kunnen leerlingen eenvoudige getalrelaties ontwikkelen, zoals bijvoorbeeld:

¾ = 3 × ¼; ¾ = 1 – ¼; ¾ = ½ + ¼
½ = ¼ + ¼; ½ = 2 × ¼

Door de manier waarop ze ontstaan zullen deze getalrelaties verbonden zijn met concrete situaties. Met oog op het toepassen is het belangrijk die verbinding in stand te houden.

Als we begrijpen ruim opvatten dan gaat het bij breuken ook om de relaties met percentages, kommagetallen en verhoudingen. In het dagelijks leven hebben percentages en kommagetallen grotendeels de rol overgenomen die breuken vroeger speelden. Ook wordt soms gekozen voor een beschrijving in termen van verhoudingen. Omgekeerd biedt het denken aan breuken ons houvast bij het redeneren met percentages, kommagetallen en verhoudingen. Daarbij gebruiken we vaak relaties tussen eenvoudige breuken en percentages en dergelijke als referentie.

Het gaat echter niet alleen om contexten of verschijningsvormen, maar ook om reken-wiskundige relaties, zoals, bijvoorbeeld, relaties tussen ¾, 75%, 0,75 en '3 van de 4'.

Begrijpen betekent bij breuken dat een leerling inzicht heeft in de relaties tussen de verschillende fysieke en getalsmatige verschijningsvormen van breuken en dat de leerling flexibel kan wisselen tussen breuken, percentages, kommagetallen en verhoudingen.

Doorgaande leerlijnen gericht op inzicht

Wanneer ons doel begrijpen is, moeten we ook aandacht hebben voor langlopende leerprocessen. Zoals we hiervoor opmerkten gaat het bij begrijpen om de betekenis in concrete contexten, om de betekenis op een meer formeel niveau en om de relaties tussen verschillende betekenissen. De verhoudingen hiertussen veranderen in de loop van de tijd. In het begin zijn het vooral de contexten die betekenis verlenen. Geleidelijk aan wordt dit vervangen door vakinhoudelijke betekenis. Een doorgaande leerlijn mikt op twee ontwikkelingen: (1) die van context-gebonden naar context-loos en (2) die van concreet handelen naar redeneren op een meer formeel niveau. In beide gevallen vormt het ontwikkelen van netwerken van reken-wiskundige relaties – zoals bijvoorbeeld getalrelaties - de motor.

Van context-gebonden naar context-loos

Door steeds meer reken-wiskundige relaties te ontwikkelen ontstaan netwerken van getalrelaties. Via de vorming van zo'n relatienet creëert de leerling voor zichzelf een reken-wiskundige werkelijkheid die onafhankelijk is van contexten. In die zin vindt er een overgang plaats van context-gebonden naar context-loos. Die overgang is echter niet absoluut. Om inzichtelijk te kunnen blijven werken moet er een verbinding blijven, bijvoorbeeld om die te kunnen gebruiken bij het oplossen van contextproblemen. Bij een contextprobleem wordt eerst een vertaling gemaakt naar een context-loos, reken-wiskundig niveau. Vervolgens wordt het probleem op dat niveau opgelost en daarna wordt de oplossing weer wordt terugvertaald (zie hoofdstuk 2 over modelleren)

Breuken als voorbeeld; van benoemde naar onbenoemde breuken

Een belangrijke stap in de ontwikkeling van breukbegrip is de overgang van breuken als benoemde getallen ('¾ pizza') naar breuken als onbenoemde getallen ('¾'). Breuken zijn in een context altijd benoemde getallen. Bij het meten zijn de getallen gekoppeld aan een maat, zoals, bijvoorbeeld, bij ¾ liter melk, of ¾ meter. Wanneer vier kinderen drie pizza's verdelen en ieder kind krijgt ¾ pizza is de pizza als het ware de maat. De gangbare definitie van ¾ impliceert ook een maat; 'Je deelt iets in vieren en neemt daar één deel van, dan heb je één vierde.' 'Als je drie delen neemt, heb je drie vierde.' Het gaat daarbij altijd om ¾ van iets. Ook als we een tekening met een factor ¾ verkleinen is er sprake van benoemde getallen: elke nieuwe lengte is ¾ deel van de-oude-lengte. Kortom, wanneer breuken hun betekenis ontlenen aan contexten hebben die altijd het karakter van benoemde getallen.

Uiteindelijk kunnen breuken het karakter krijgen van onbenoemde getallen; getallen die een zelfstandige betekenis hebben zonder verwijzing naar een of andere grootheid, maar die in plaats daarvan hun betekenis ontlenen aan relaties met andere getallen. Bij ¾ denken we dan bijvoorbeeld aan getalrelaties als:

$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$
$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$
$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ etc.

Hierbij kan worden opgemerkt, dat deze getalrelaties in het PO al kunnen worden ontwikkeld, maar dat de breuken dan in eerste instantie nog het karakter hebben van benoemde getallen voor de leerlingen. Ook bij kale sommen denken basisschoolleerlingen vaak aan concrete objecten of maten. Bij $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ zullen ze bijvoorbeeld denken aan een cirkel; 'driekwart cirkel is een halve cirkel plus een kwartcirkel'. Pas geleidelijk aan maken de getalrelaties zich los van deze contexten en gaan ze de basis vormen voor puur getalsmatige relatienetten.

Dualiteit tussen concreet handelen en formeel redeneren

Kinderen leren getallen vanuit handelingen. Tellen leidt bijvoorbeeld tot hoeveelheidsgetallen, afpassen leidt tot maatgetallen. Later gaan getallen hun betekenis ontlenen aan netwerken van getalrelaties. Het is belangrijk dat de relatie tussen die twee - concreet handelen en redeneren op een meer formeel niveau - blijft bestaan. Getallen krijgen daarmee uiteindelijk een dubbele betekenis. Het voordeel daarvan is dat het steeds mogelijk blijft om terug te gaan naar de onderliggende handelingen. Wanneer een jonge leerling bijvoorbeeld 4 + 5 niet paraat heeft, kan hij of zij in gedachten doortellen vanaf 4: 'vier...vijf, zes, zeven, acht, negen'.

Een dergelijke ontwikkeling zien we niet alleen bij getallen maar ook bij alle andere onderdelen van rekenen en wiskunde (zie ook hoofdstuk 7, Variabelen en functies). In het algemeen wordt het doorlopen van een dergelijke ontwikkeling noodzakelijk geacht om betekenisvolle reken-wiskundige concepten te verwerven.

Dualiteit, breuken als voorbeeld

Het bijzondere van breuken is dat de dualiteit van activiteit en getal zit ingebakken in de breuknotatie die op twee manieren kan worden opgevat. In de notatie die we gebruiken is de breukstreep een deelstreep. De notatie ¾ staat letterlijk voor '3 gedeeld door 4'. We gebruiken dus de beschrijving van een bewerking ('3 : 4'), om de uitkomst van die bewerking aan te duiden. In die zin kunnen we spreken van twee betekenissen: de breuk als een bewerking en dezelfde breuk als het getal dat overeenkomt met de uitkomst van die bewerking. Beide betekenissen moeten voor de leerlingen het karakter krijgen van twee kanten van dezelfde medaille, wat zich dan zal manifesteren in moeiteloos wisselen tussen de twee betekenissen. Afhankelijk van de situatie kunnen ze de breuk opvatten als een bewerking of als een getal. Zo kan 7 × ¾ worden opgevat als 7 × (3 : 4) en dat is gelijk aan 7 × 3 : 4. Dit kunnen de leerlingen veralgemeniseren tot 'vermenigvuldigen met ¾', is hetzelfde als 'eerst vermenigvuldigen met 3 en dan delen door 4'.

Parate kennis

Het zal duidelijk zijn dat, ook als we de nadruk leggen op inzicht, parate kennis nog steeds heel belangrijk is. De relatienetten die in de hier gegeven beschrijving van begrijpen een centrale rol spelen dienen - op zijn minst gedeeltelijk - het karakter te krijgen van parate kennis. We kunnen daarbij denken aan een harde kern die direct oproepbaar is, aangevuld met geautomatiseerde rekenfeiten en reken-wiskundige kennis waar even over moet worden nagedacht. We kunnen de doelen wat betreft parate kennis echter beperkt houden. De betere rekenaars zullen ongetwijfeld een uitgebreider repertoire ontwikkelen dan de minder goede rekenaars, Ook een beperkt, maar flexibel gebruikt repertoire aan parate kennis kan echter al een krachtig hulpmiddel zijn bij globale berekeningen.

Breuken als voorbeeld; parate kennis

Een leerling hoeft natuurlijk niet te weten welk percentage nu precies bij $\frac{9}{13}$ hoort, maar hij of zij moet wel kunnen bedenken dat het in de buurt ligt van, en minder is dan, $\frac{3}{4}$ is en dus in de buurt ligt van 75%, en minder is dan 75%. Hoewel de omvang van het repertoire aan parate kennis per leerling zal verschillen willen we ervoor pleiten dat alle leerlingen zich de bewerkingen met eenvoudige breuken (met noemers 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 en, 5, 10 en 20) eigen maken; inclusief de bewerkingen met die percentages en kommagetallen, die gelijkwaardig zijn aan de bovengenoemde breuken.

Ten slotte willen we opmerken dat de vertrouwdheid met eenvoudige getallen de mogelijkheid biedt om op een gegeven moment te generaliseren naar standaardaanpakken. Zo zullen leerlingen die vertrouwd zijn met halven, kwarten en achtsten kunnen beredeneren dat $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$. Wat kan leiden tot de aanpak om bij optellen en aftrekken te zoeken naar gelijknamige breuken.

5. Inperking

Door de ruime beschikbaarheid van apparaten verliest het vlot op papier kunnen rekenen met grote of lastige getallen aan betekenis. Berekeningen als hieronder doen apparaten foutloos en snel.

$$\begin{array}{r} 2.346 \\ 412 \\ \hline \ldots\ldots \end{array} \times \qquad\qquad 3487{,}44 : 17 = \ldots$$

De aandacht kan beter uitgaan naar globaal rekenen en rekenen uit het hoofd. De basis daarvoor ligt in een repertoire aan parate kennis en in het flexibel om kunnen gaan met getalrelaties, zoals beschreven in hoofdstuk 2 en 3. Daarbij hoort ook een vlotte beheersing van het optellen en aftrekken onder de 20 en van de tafels van vermenigvuldiging. Zo wordt een basis gelegd voor wat wel gecijferdheid wordt genoemd: In allerlei dagelijkse situaties flexibel kunnen rekenen en berekeningen kunnen controleren.

Het foutloos beheersen van pen-en-papier procedures heeft zijn praktisch nut verloren. Het leren van de standaardbewerkingen voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen kost veel onderwijstijd, terwijl de meeste leerlingen deze procedures ook na veelvuldig oefenen niet volledig onder de knie krijgen.

Wij pleiten er niet voor dat de standaardbewerkingen geheel uit het onderwijs verdwijnen, want inzicht in hoe deze procedures werken draagt bij aan een beter getalbegrip. Bovendien kunnen ze dienen als voorbeeld voor de rol van algoritmiseren binnen rekenen-wiskunde. Er kan echter met veel minder onderwijstijd worden volstaan. Belangrijk is dat het onderwijs wordt ingericht vanuit het besef dat leerlingen later berekeningen met grote getallen altijd via een apparaat zullen uitvoeren.

Een vergelijkbaar pleidooi kan worden gehouden voor andere leerstofonderdelen waar veel oefentijd aan wordt besteed. Bij de algebra, bijvoorbeeld, lijkt een verschuiving wenselijk van het inoefenen van procedures naar begrijpen, kwalitatief redeneren en het gebruik van digitale tools.

6. Statistiek

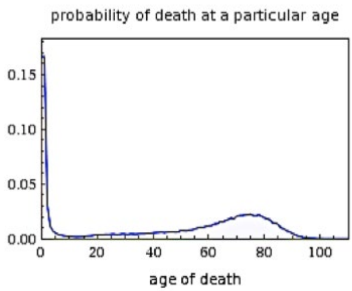
Het onderwijs zal de leerlingen van nu moeten voorbereiden op de grote en nog steeds groeiende rol van statistiek in de maatschappij. Een gevolg van de toenemende computerisering is dat er steeds meer statistische informatie beschikbaar komt. Dit geldt zowel voor statistische informatie die we in krant, op tv en via andere media vinden, als voor resultaten van statistische bewerkingen die mensen in hun beroepssituatie tegenkomen. Kenmerkend aan een statistische benadering is dat informatie wordt ingedikt. Met behulp van statistische bewerkingen wordt informatie zichtbaar gemaakt die in de data verborgen zit, maar het betekent tegelijkertijd dat er ook altijd informatie verloren gaat.

Statistische geletterdheid

Dat er ook informatie verloren gaat wordt vaak niet opgemerkt, zoals het volgende voorbeeld laat zien. In een reclametekst in de NRC – 17 december 2016 – stond:

> 'Het is in 2016 nauwelijks te geloven: 120 jaar geleden was de gemiddelde leeftijd die Nederlanders bereikten 49 jaar. Als je de 50 haalde was je dus min of meer bejaard. Tegenwoordig vinden we het heel normaal dat we 80 worden.'

Zo'n tekst suggereert dat we in vergelijking met 1900 tegenwoordig veel ouder worden. Een gratis telefoon-app, WolframAlpha, laat echter zien dat de levens- verwachting van 50-jarigen in 1900 helemaal niet zo slecht was. De lage gemiddelde leeftijd van toen was het gevolg van een hoge kindersterfte.



levensverwachting in 1900

Je kunt een verzameling data met één getal weergeven, maar hoe die data zijn verdeeld is dan niet meer zichtbaar. Soms is één getal voldoende – bijvoorbeeld als je het gemiddelde gebruikt om uit te rekenen, hoeveel personen er door de bank genomen in een lift kunnen. Soms is de verdeling juist wel belangrijk, zoals in het voorbeeld van de levensverwachting. Het goed kunnen beoordelen wat het gemiddelde hier betekent, vraagt een breed inzicht in wat een gemiddelde is.

We kunnen stellen dat leerlingen goed inzicht moeten hebben in wat statistische begrippen en procedures inhouden, en hoe deze zich verhouden tot toepassingssituaties. Naast het begrijpen van de principes en concepten die ten grondslag liggen aan statistische procedures en werkwijzen gaat het ook om inzicht in de voorwaarden waaraan moet worden voldaan om bepaalde statistische procedures te kunnen toepassen. Daarnaast vraagt het omgaan met statistische informatie uiteraard ook om een kritische houding ten opzichte van de manier waarop de is informatie verzameld.

Beroepen

Sommige beroepen vragen meer dan statistische geletterdheid. Voor wie werkt met onderzoeksgegevens is bijvoorbeeld kennis van statistische toetsen en waarschijnlijkheidsrekening noodzakelijk. Maar een productiemedewerker die in een fabriek gecompliceerde apparatuur bedient zal vaak ook statistische informatie moeten kunnen interpreteren.

Big Data

Een spraakmakend fenomeen is het gebruik van 'Big Data'. Het vraagt om een kritische houding ten opzichte van het gebruik van daarop gebaseerde analyses. We kunnen hierbij denken aan de vertekening die big-data analyses kunnen opleveren door de toevalligheden in de data set. Een ander aspect betreft het gevaar dat waarschijnlijkheden gehanteerd gaan worden als voorspellers voor individuele gevallen, bijvoorbeeld bij verzekeringen.

Algemeen gesteld kunnen we vaststellen, dat steeds meer statistiek zal moeten worden begrepen door steeds meer mensen. Het ligt daarom voor de hand om vroeg te beginnen, dus op de basisschool. Daarnaast lijkt het aan te bevelen om specifiek voor het onderwijs software te ontwikkelen, waarmee fundamentele statistische concepten toegankelijk gemaakt kunnen worden.

7. Variabelen en functies

Variabelen en functies vormen de bouwstenen voor de modellen waar computers en geavanceerde apparaten gebruik van maken (zie hoofdstuk 2, Modelleren). Dit betekent dat leerlingen - afhankelijk van hun uitstroomniveau – een elementair of een meer fundamenteel begrip moeten hebben van variabelen en functies.

Variabelen en functies in het PO

Variabelen en functies komen in het PO al op een informele manier aan de orde. Zo redeneren jonge leerlingen over onbekende getallen bij het oplossen van zogeheten ‘vleksommen’.

vleksom

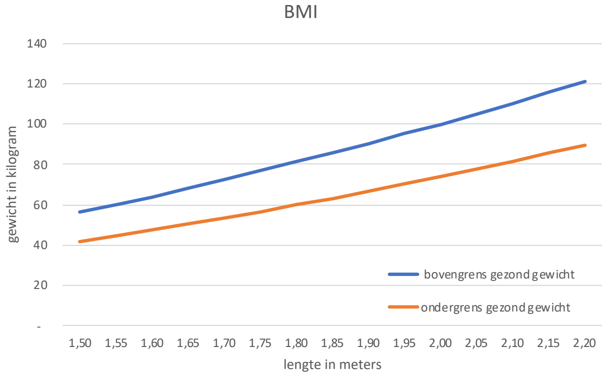
In de bovenbouw leren leerlingen omgaan met formules voor oppervlakte en inhoud, zoals Opp. = L × B voor de oppervlakte van een rechthoek en Opp. = πr^2 voor de oppervlakte van een cirkel.

Daarnaast komen grafieken naar voren als manier om de samenhang tussen twee variabelen te beschrijven – bijvoorbeeld tussen temperatuur en tijd of afstand en tijd. Gezien de verwevenheid van functies en grafieken is een zorgvuldige introductie van grafieken van groot belang. De conventies waar grafieken op gebaseerd zijn - bijvoorbeeld de proportionele weergave van grootheden op de assen - maken grafieken tot krachtige hulpmiddelen, maar leerlingen moeten die conventies wel leren doorzien.

Grootheden als variabelen

Een belangrijke stap in het werken met functies en variabelen is dat grootheden – zoals lengte, gewicht, inkomen, luchtkwaliteit, enzovoort – moeten worden opgevat als variabelen. Dit vraagt van leerlingen een andere manier van denken, want voor hen zijn grootheden eerst nog gekoppeld aan een specifiek voorwerp of individu, bijvoorbeeld: Linda is 1 meter 75 lang. Ze moeten de stap maken om een grootheid als lengte op te gaan vatten als een variabele die verschillende waarden kan aannemen. Wanneer we, bijvoorbeeld, de samenhang tussen de lengte en het gewicht van een bepaalde groep beschrijven denken we niet aan individuele gevallen, maar kijken we naar het geheel.

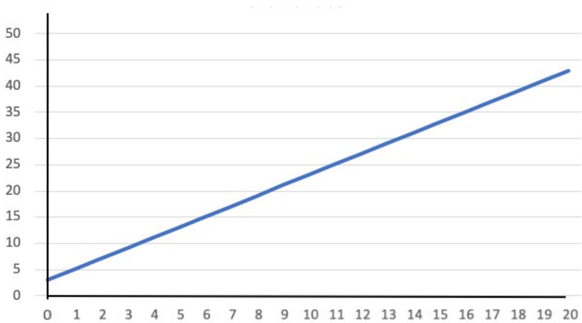
De grafiek in de figuur hieronder beschrijft de relatie tussen lengte en gewicht bij een gegeven BMI (Body Mass Index). We zien dan dat het gewicht (bij eenzelfde BMI) toeneemt als de lengte groter wordt.



Samenhang tussen lengte en gewicht bij gegeven BMI

Objectkarakter

In de geschiedenis van de wiskunde komen functies eerst naar voren als beschrijvingen van uit te voeren rekenvoorschriften. De formule f(x) = 2x + 3 staat dan voor: ‘vermenigvuldig het input-getal met 2 en tel er daarna 3 bij op’. Wanneer we deze berekening voor een reeks van waarden uitvoeren zien we een patroon, we zien dat er sprake is van een regelmatige toename. Anders gezegd, de formule f(x) = 2x + 3 beschrijft een lineaire functie. Daarmee onderscheidt deze functie zich van andere functies, zoals een kwadratische of een periodieke functie. Dit lineaire karakter wordt goed zichtbaar als we een grafiek van f(x) = 2x + 3 tekenen.



Grafiek van f(x) = 2x + 3 voor positieve x.

Meer formeel, kunnen we de functie f(x) = 2x + 3 daarom definiëren als iets (een object) dat bestaat uit de verzameling getallenparen (x, y) die aan het voorschrift y = 2x + 3 voldoen.

Of verbanden lineair zijn, kwadratisch zijn, of een ander karakter hebben, speelt een wezenlijke rol in modellen van de werkelijkheid en dus ook bij het gebruik van computermodellen. Daarmee is het denken in termen van een functie als een object met specifieke kenmerken dus van belang voor het participeren in de moderne maatschappij.

Integreren en differentiëren

Het redeneren over samenhangende grootheden heeft vaak betrekking op de snelheid waarmee iets verandert. 'Snelheid' kan staan voor de verandering van de afgelegde afstand, maar we kunnen ook redeneren over groeisnelheid of over de snelheid waarmee iets afkoelt. Omgekeerd kan het redeneren over snelheid ook betrekking hebben op het cumulatief effect van veranderingen. Wanneer bekend is hoe de snelheid van een auto varieerde binnen een bepaalde tijdsperiode valt te bepalen hoeveel kilometer die auto heeft afgelegd.

Hiermee betreden we de wiskunde van het differentiëren en integreren. Deze wiskunde kent een breed toepassingsgebied, dat dankzij de beschikbaarheid van computers snel groeit. Het is het gereedschap van technici, fysici, biologen, medici, economen en vele anderen. In onze hoogtechnologische maatschappij is het voor iedereen van belang om tenminste een globaal begrip te hebben van deze wiskunde van verandering. Een formele benadering is in het funderend onderwijs niet haalbaar, maar er kan wel een verkenning plaats vinden van de onderliggende inzichten – zelfs in het basisonderwijs.

8. Algoritmiseren en Computational Thinking

De digitalisering van de maatschappij leidt vanzelfsprekend tot aandacht voor de manier waarop computers kunnen worden ingezet. Reken-wiskundige modellen vormen de basis voor computergestuurde processen, simulaties en berekeningen. Vertalen van complexe problemen naar zulke modellen wordt een steeds belangrijkere vaardigheid. Termen die in dit verband opduiken zijn algoritmiseren en computational thinking.

Algoritmiseren

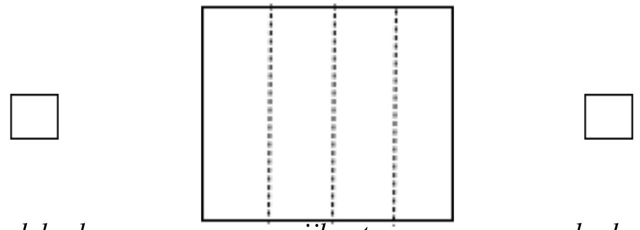
Een algoritme is een beschrijving van de stappen die een-voor-een moeten worden uitgevoerd om vanuit een geven input de gewenste output te produceren. Om leerlingen goed voor te bereiden op dit aspect van computergebruik lijkt het gewenst ze ervaring op te laten doen met algoritmiseren. Het reken-wiskundeonderwijs is daarvoor de aangewezen plek, want binnen deze discipline heeft het ontwikkelen van efficiënte algoritmes altijd centraal gestaan.

Voorbeelden van zulke algoritmen zijn de bekende bewerkingsschema's voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Het zogeheten, 'progressief schematiseren', dat in moderne rekenmethodes wordt gebruikt om de leerlingen zelf deze algoritmen te laten ontwikkelen, kan worden gezien als een vorm van algoritmiseren. Hierbij is sprake van stapsgewijze procedures die steeds efficiënter en beknopter worden gemaakt.

De bewerkingsschema's voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen lijken niet direct op de algoritmen waar computers mee werken. Een activiteit die dichter bij het werken met computers ligt is de volgende taak rond het vergelijken van verpakkingen.

Voorbeeld: koekblikken

Een brood- en banketfabriek heeft een nieuwe variant op de bekende rondo's bedacht. Deze worden vierkant met afgeronde hoeken. De fabriek wil de koeken in koekblikken gaan verkopen. Het gaat om koeken van 7,5 cm bij 7,5 cm en een dikte van 1,2 cm. Deze koeken worden verpakt in rechthoekige koekblikken. De vraag is alleen nog hoe groot de blikken moeten worden. Dat hangt uiteraard af van het aantal koeken dat je in een blik wilt doen. Er wordt gedacht aan tussen de 4 en 12 koeken per blik. De bedrijfsleider wil eerst weten hoeveel materiaal er nodig is voor koekblikken voor 4, respectievelijk 5, 6, … tot en met 12 koeken.



De leerlingen wordt gevraagd om voor 4 t/m 12 koeken per koekblik te berekenen, hoeveel materiaal er voor een blik nodig is.

Een systematische aanpak levert de volgende tabel op, waarbij eventuele extra randen voor de deksel zijn verwaarloosd.

aantal rondo's	deksel	onderkant	zijkanten	totaal
4	56,25	56,25	144	256,5
5	56,25	56,25	180	292,5
6	56,25	56,25	216	328,5
7	56,25	56,25	252	364,5
8	56,25	56,25	288	400,5
9	56,25	56,25	324	436,5
10	56,25	56,25	360	472,5
11	56,25	56,25	396	508,5
12	56,25	56,25	432	544,5

Dit patroon komt in feite overeen met het algoritme waarmee je de hoeveelheid materiaal kunt berekenen: ‘(1) bereken de oppervlakte van de deksel; (2) bereken de oppervlakte van de bodem, (3) bereken de oppervlakte van de zijkanten en (4) tel deze drie getallen op’.

De uitkomsten van (1) en (2) zijn steeds hetzelfde, dus kun je het algoritme verkorten tot: (1) bereken de oppervlakte van de zijkanten en (2) tel daar (56,25 + 56,25 =)112,5 cm^2 bij op’.

De oppervlakte van de zijkanten is $4 \times$ aantal (koeken) $\times 7{,}5 \times 1{,}2$ cm^2 $= 36 \times$ aantal cm^2. Dit levert een kort algoritme dat kan worden uitgevoerd op de rekenmachine: '(1) voer het aantal in, (2) vermenigvuldig dat met 36 en (3) tel daar 112,5 bij op'.

Wanneer deze opgave wordt gemaakt door vo-leerlingen die bekend zijn met een grafische rekenmachine kan hen worden gevraagd een formule op te stellen waarmee je tabellen kunt produceren.

De formule voor de grafische rekenmachine wordt dan:

$$Y = 36\,X + 112{,}5.$$

In een terugblik kunnen deze activiteiten in het perspectief van het ontwikkelen van een algoritme worden geplaatst.

Computational thinking

Bij computational thinking gaat het – populair gezegd – om de vraag: Hoe kun je ervoor zorgen dat een computer een bepaald probleem voor je oplost? Dit betekent dat een probleem zo gestructureerd moet worden dat het leidt tot oplossingsprocedures die een computer kan uitvoeren. Dit vraagt inzicht in de manier waarop computerprogramma's werken.

Net als bij algoritmiseren speelt het opdelen van oplossingsprocessen in deelstappen en het herhaald uitvoeren van dezelfde procedure voor verschillende input een grote rol. Bovendien is het bedenken of kiezen van efficiënte algoritmen ook een onderdeel van computational thinking.

Kenmerkend in het programmeren van computers is het gebruik van subroutines waarbij de input systematisch wordt gevarieerd, bijvoorbeeld door een variabele steeds met 1 op te hogen tot een bepaalde waarde is bereikt. Strikt genomen beperkt computational thinking zich echter niet tot computers. Er moet iets worden bedacht dat door mens en machine samen kan worden uitgevoerd, waarbij de specifiek kwaliteiten van mensen en computers worden gecombineerd.

In een op computational thinking gerichte opdracht kan expliciet naar het gebruik van computers worden verwezen, zoals in de volgende opdracht.

De brood- en banketfabriek wil een overzicht maken van het materiaal dat nodig is voor koekblikken voor allerlei formaten vierkante koeken.

Bedenk hoe een computerprogramma eruit zou moeten zien, dat deze tabellen zou kunnen produceren.

9. Meten en meetkunde

Meten

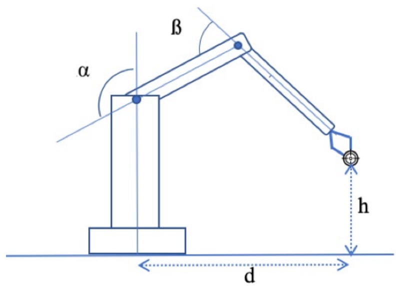
Omdat computers steeds breder worden toegepast, dienen steeds meer zaken gekwantificeerd en dus gemeten te worden. Dit betekent dat het meten wordt uitgebreid naar andere variabelen dan de vertrouwde grootheden als lengte, gewicht, inhoud en oppervlakte. Het meten strekt zich nu ook uit tot zaken als economische groei, medicijngebruik, koopkracht en dergelijke. Daarbij kan worden opgemerkt het in veel gevallen om samengestelde grootheden gaat, die bovendien gemiddelden zijn. Ook dat vraagt een uitbreiding van het onderwijsprogramma.

Vaak is daarbij sprake van benaderingen en het gebruik van steekproeven, waarmee we komen op het grensvlak van meten en statistiek, zoals inzicht in een statistische benadering van meetfouten.

Tegelijkertijd zien we een toenemende variatie in eenheden en bijbehorende voorvoegsels. Denk bijvoorbeeld aan Megawatt, Gigabytes en Terajoules.

Meetkunde

De computerisering van de maatschappij strekt zich ook uit tot het representeren van, en het opereren in de twee- en driedimensionale wereld. Eenvoudige voorbeelden zijn plattegronden, kaarten, foto's en doorsneetekeningen. In de digitale wereld ontstaan steeds meer toepassingen die hiervan gebruik maken, zoals navigatie-apps, routeplanners en afstandsmeters. In het verlengde hiervan kunnen we ook denken aan de rol van meetkunde bij het ontwerpen van websites en games.



robotarm

Ruimtemeetkunde komt naar voren in ontwerpsoftware als CAD/CAM en in relatie tot 3D-printing en 3D-toepassingen. Verder spelen ruimte-meetkundige inzichten een grote rol in automatisering en robotisering. Denk bijvoorbeeld aan het besturen van robotarmen in allerhande productieprocessen.

10. De 21st. Century skills

Het meest besproken kenmerk van onderwijs voor de toekomst betreft de zogeheten 21e eeuwse vaardigheden. Er zijn inmiddels tal van publicaties over verschenen die constateren dat in een hoogtechnologische wereld een groot beroep wordt gedaan op vaardigheden als kritisch denken, probleem oplossen, creativiteit, flexibiliteit, communiceren, samenwerken, en omgaan met digitale tools. Het streven om aan dit soort doelen te werken is echter niet nieuw. Zo lezen we in het voorwoord bij de kerndoelen po:

> In de reken-wiskundeles leren kinderen een probleem wiskundig op te lossen en een oplossing in wiskundetaal aan anderen uit te leggen. Ze leren met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen. Het uitleggen, formuleren en noteren en het elkaar kritiseren leren kinderen als specifiek wiskundige werkwijze te gebruiken om alleen en samen met anderen het denken te ordenen, te onderbouwen en fouten te voorkomen.

De hier genoemde vaardigheden kunnen we opvatten als op het reken-wiskundeonderwijs toegesneden uitwerking van 21st century skills, die ook los van een voorbereiding op de toekomst van groot belang zijn in het reken-wiskundeonderwijs. Maar hieraan zal in het funderend onderwijs meer aandacht moeten worden besteed. Daarbij kan een link worden gelegd met de 'wiskundige denkvaardigheden' uit het programma van de bovenbouw van het vo.

Bij de ontwikkeling van vaardigheden moet een balans gevonden worden tussen de benodigde basisvaardigheden en de gewenste hogere-orde vaardigheden, zoals wiskundig redeneren, formaliseren, abstraheren, wiskundig communiceren, modelleren en visualiseren. Deze hogere orde vaardigheden zijn essentieel voor het ontwikkelen van een positieve wiskundige attitude, die met kenmerken als een doelgerichte, reflecterende en onderzoekende houding ook voor andere- dan wiskundige activiteiten van belang is.

Taal

De bovenstaande onderwijsschets laat zien hoe groot het belang van taal is bij het ontwikkelen van 21st century skills. Leerlingen moeten een in woorden beschreven probleem kunnen interpreteren en vertalen in reken-wiskundige termen, en ze moeten hun antwoord op een adequate manier kunnen formuleren. Taal is ook nodig om te kunnen participeren in de les, om te kunnen begrijpen wat de leraar en de andere leerlingen zeggen, om mee te kunnen praten, om te kunnen uitleggen, redeneren en argumenteren. Meer in het algemeen is het belangrijk om te kunnen praten over alles wat met rekenen-wiskunde te maken heeft, bijvoorbeeld als het er om gaat hoe bepaalde resultaten tot stand zijn gekomen, of hoe een gecomputeriseerd apparaat werkt.

Dit alles betekent dat er in het onderwijs aandacht besteed moet worden aan het in taal beschrijven van reken-wiskundige begrippen, bewerkingen, uitkomsten en representaties. Hier ligt een duidelijke link met wat in hoofdstuk 4 is gezegd over begrijpen. Deels gaat het om het ontwikkelen van een specifieke vaktaal, met begrippen als verhouding, variabele en macht, en vakspecifieke formuleringen als ‘procenten uitdrukken in een breuk’, of ‘rond af op twee decimalen’. Het gaat echter ook om het ontwikkelen van algemene schooltaal, rond begrippen die ook bij andere vakken aan bod komen, zoals ‘toename’, ‘weergeven’ en ‘verband’.

Het toenemend gebruik van digitaal gereedschap in de reken-wiskundeles maakt expliciete aandacht voor de wiskunde-taal des te belangrijker. Ook de toename van het online-onderwijs vraagt daarom; online onderwijs lijkt een groter beroep te doen op het taalbegrip van leerlingen.

Leraren kunnen leerlingen ondersteunen bij het ontwikkelen van de relevante taal door contexten en teksten begrijpelijk te maken en door de betekenis van begrippen en formuleringen te bespreken. Ze kunnen de taalontwikkeling ook ondersteunen door leerlingen te stimuleren om te praten en te schrijven in de reken-wiskundeles, en door hen feedback te geven op hun taalgebruik.

11. Digitale tools

In de maatschappij wordt in toenemende mate gebruik gemaakt van allerhande digitale tools, zoals rekenmachines, spreadsheets, computeralgebra systemen, statistische programma's en dergelijke. Een van de doelen van het funderend reken-wiskundeonderwijs zou moeten zijn dat leerlingen leren dergelijke tools te gebruiken. Daar is specifiekere kennis voor nodig. Het kunnen gebruiken van deze tools kan niet los worden gezien van inzicht in de ingebouwde reken-wiskundige concepten en procedures, en vertrouwdheid met de wiskundige syntax en conventies van deze tools.

Excel-voorbeeld annuïteitenhypotheek

Hoofdsom € 300.000,00
Rente 2,5 %
Annuïteit € 1422,30
Regels:

C3 = B2 * 0,025	C4 = B3 * 0,025	C5 = B4 * 0,025	enz.
E3 = D3 – C3	E4 = D4 – C4	E5 = D5 – C5	enz.
B3 = B2 – E2	B4 = B3 – E3	B5 = B4 – E4	enz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		hoofdsom	rente	annuiteit	aflossing					
2		300000	0,025	14022,3			rente = som x 0,025 --> C3 = B2 x 0,025			
3	1	293478	7.500	14022,3	6522		aflossing = annuiteit - rente --> E3 = D3 - C3			
4	2	286792	7.337	14022,3	6685		som = som - aflossing --> B3 = B2 - E2			
5	3	279940	7.170	14022,3	6852		enz.			
6	4	272916	6.998	14022,3	7024					
7	5	265717	6.823	14022,3	7199					
8	6	258337	6.643	14022,3	7379					
9	7	250773	6.458	14022,3	7564					
10	8	243020	6.269	14022,3	7753					
11	9	235074	6.076	14022,3	7947					
12	10	226928	5.877	14022,3	8145					
13	11	218579	5.673	14022,3	8349					
14	12	210021	5.464	14022,3	8558					
15	13	201249	5.251	14022,3	8772					
16	14	192258	5.031	14022,3	8991					
17	15	183043	4.806	14022,3	9216					
18	16	173596	4.576	14022,3	9446					
19	17	163914	4.340	14022,3	9682					
20	18	153990	4.098	14022,3	9924					

Naast het leren gebruiken van digitale tools dient er aandacht te zijn voor het gebruiken van digitale tools om te leren. Bij dit laatste moeten we ook denken aan het ontwerpen en gebruiken van tailor-made computerprogramma's die het leren kunnen ondersteunen, zoals simulatieprogramma's en specifieke tools.

12. Besluit

Als we leerlingen willen voorbereiden op een maatschappij waarin vrijwel alle reken-wiskundige berekeningen door computers worden uitgevoerd, hoe zouden we de doelen van het reken-wiskundeonderwijs dan moeten aanpassen? Dat is de vraag die in deze notitie centraal staat. We presenteerden een voorlopig antwoord op deze vraag in de vorm van tien veranderpunten, toegespitst op het funderend onderwijs (po, vmbo en onderbouw havo/vwo).

De tien punten zijn vooral bedoeld om de discussie over de doelen concreet te maken. Het is niet ons streven dat alles wat in deze notitie staat in deze vorm wordt overgenomen. Wat we hopen is dat de beschreven punten het startpunt vormen van een brede discussie, waar alle stakeholders in worden betrokken. Deze discussie zou moeten steunen op kennis over wat de maatschappij op het gebied van rekenen-wiskunde vraagt en kennis over hoe dit kan worden vertaald in onderwijsdoelen en onderwijsprogramma's.

Dergelijke kennis bestaat al, maar zal verder moeten worden uitgebouwd. Daarbij is een wisselwerking nodig tussen kennis over wat de maatschappij vraagt en ervaringen met hierbij passend onderwijs. Dit laatste veronderstelt dat leraren, lerarenopleiders en andere onderwijsexperts experimenteren met nieuwe onderwijsinhouden en op basis daarvan participeren in de discussie over vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs, passend bij de ontwikkelingen in de maatschappij.