***Reactie op Derde tussenproduct Rekenen & wiskunde***

*Koeno Gravemeijer, namens de Werkgroep Wiskunde voor Morgen*

In onze reactie laten wij ons leiden door wat ons inziens van belang is met het oog op reken-wiskundeonderwijs dat de leerlingen voorbereid op een toekomst in een steeds verder gedigitaliseerde maatschappij. We willen echter eerst opmerken dat we de nieuwe versie van de Grote opdrachten een duidelijke verbetering ten opzichte van de vorige vinden. Tegelijkertijd zien we de worsteling van de ontwikkelgroep om deze complexe problematiek binnen de beperkte tijd helder, volledig en evenwichtig op papier te krijgen.

De Grote opdrachten beschrijven de essentie van wat leerlingen vanuit het perspectief van het leergebied nodig hebben om de wereld te kunnen begrijpen (kennis) en om in die wereld adequaat te kunnen handelen (vaardigheden). De ontwikkelgroep onderscheidt 6 grote opdrachten, ingedeeld naar leergebieden die redelijk goed aansluiten op gebruikelijke indelingen zoals die van het PISA project. De prozaïsche titels die daaraan worden toegevoegd hebben geen meerwaarde en kunnen beter worden weggelaten. Belangrijker is hoe deze grote opdrachten worden ingevuld. In de toelichting op de grote opdrachten worden een aantal waardevolle uitgangspunten genoemd, doorgaande leerlijn, de wereld door een wiskundige bril beschouwen/toepassingen, toekomstgerichtheid, maatwerk en differentiatie,

en plezier in rekenen en wiskunde. Bij dit laatste punt wordt – naast aansprekende voorbeelden – terecht ook begrijpen genoemd. Dit sluit aan bij het mantra, "Rekenen/wiskunde is leuker *als* je denkt". Genoemde toelichting vormt een inleiding op de kern van de notitie, de grote opdrachten – die worden aangevuld met inhouds-overstijgende reken- en wiskundige bekwaamheden. In deze reactie richten we ons op deze twee onderwerpen.

*Opmerkingen bij de Grote opdrachten vanuit het perspectief van toekomstgerichtheid en doorgaande leerlijn*

De toekomstgerichtheid komt bij *getallen en bewerkingen* wordt terug in de constatering, dat in de maatschappij steeds meer digitale hulpmiddelen het complexere rekenwerk van ons overnemen. Hier wordt terecht de conclusie aan verbonden dat schattend rekenen hierdoor, ten opzichte van precies rekenen met grote getallen, belangrijker wordt. Waarbij de leerlingen deze digitale hulpmiddelen ook moeten leren gebruiken. De opmerking dat begrip van en rekenen met standaardprocedures en strategieën de basis blijft voor gecijferdheid, zouden we iets anders willen formuleren. Het begrijpen van standaardprocedures en strategieën blijft van belang, maar voor gecijferdheid zijn de fundamenten voor globaal rekenen – netwerken van getalrelaties, eigenschapsrekenen en rekenen met machten van 10 – belangrijker.

De ontwikkelgroep wijst erop dat Getallen en Bewerkingen het fundament vormen voor rekenen en wiskunde in alle fases van po en vo. We zouden daar als kanttekening aan willen toevoegen, dat uit oogpunt van efficiency onderzocht moet welke vaardigheden in dit domein nu precies een voorwaarde vormen voor de verdere wiskundige ontwikkeling.

Bij het beschrijven van de inhoud van deze opdracht, merkt de ontwikkelgroep op: "Aanvankelijk worden getallen nog gekoppeld aan hoeveelheden concrete objecten. In het volgende stadium gaan leerlingen getallen zien als reken-wiskundige objecten, die je los kunt zien van een context ("drie", in plaats van "drie appels").' Ze verwijst daarmee naar het principe van proces-object overgangen, die volgens Sfard (1991) herkenbaar zijn in de geschiedenis van de wiskunde. De vertaling daarvan naar het leren van rekenen-wiskunde is in lijn met de ideeën van andere wetenschappers op het gebied van rekenen-wiskunde, zoals Tall, Dubinsky, Freudenthal, Cobb en Van Hiele. Door de doelen van het reken-wiskundeonderwijs te formuleren in termen van reken-wiskundige objecten en -relaties, kan een belangrijke stap worden gezet naar een conceptuele leerlijn, die een oplossing kan bieden voor de veel besproken aansluitingsproblemen tussen PO en VO.

Bij *Verhoudingen* wordt erop gewezen dat breuken, procenten, verhoudingen en kommagetallen / decimale getallen in samenhang moeten worden aangeboden. En dat hier een overgang van informeel naar formeel moet worden gemaakt, die ons inziens weer teruggrijpt op het idee van de vorming van reken-wiskundige objecten. Meer specifiek voor breuken kunnen we dit koppelen aan de overgang van "benoemde" naar "onbenoemde breuken". Ons inziens gaat het hier enerzijds om een samenhang tussen verschillende manieren van beschrijven van dezelfde fenomenen (wat van groot belang is voor toepassingen) en anderzijds om een samenhang op het niveau van getalrelaties (zoals bijvoorbeeld ¾ = 0,75 ⬄ 75% en 3 van de 4). Het is dit type getalrelaties dat gebruikt kan worden bij het eerder genoemde globaal rekenen, waarvan het belang in de digitale maatschappij toeneemt. We zouden hier nog aan willen toevoegen dat het werken met apparatuur die berekening uitvoert inzicht vraagt in relaties tussen operaties. (Bijvoorbeeld wanneer je weet wat 0,8 liter kost en je de prijs per liter wilt uitrekenen.)

Bij *Meten en meetkunde* valt op dat de ontwikkelgroep zich beperkt tot gangbare onderwerpen als lengte, gewicht, oppervlakte etc. In de informatie maatschappij bestrijkt het meten echter een veel breder gebied, financieel-economisch, maatschappelijk, medisch-biologisch, milieu. Waar andersoortige variabelen worden gemeten, zoals koopkracht, gezondheid en luchtverontreiniging, waarvoor specifieke maten worden ontwikkeld. Hier komt bovendien het aspecten van meetnauwkeurigheid en het meten via steekproeven naar voren. In het verlengde hiervan ligt het wiskundig greep krijgen op veranderingen; covariatie en calculus.

Bij meetkunde zouden vanuit de ontwikkelingen in de informatiemaatschappij nog 3D-imaging en 3D-printen moeten worden genoemd.

Bij *Variabelen, verbanden en formules* wordt erop gewezen dat de technologie zich in een rap tempo blijft ontwikkelen; genoemd worden, mobiele telefonie, computers, duurzame energiemiddelen en domotica (huisautomatisering). De concrete voorbeelden die daarna worden gegeven steken hier nogal schraal bij af. Er wordt weliswaar een verbinding gelegd met toepassingen, maar de wiskundige inhoud lijkt vergelijkbaar met wat nu in de onderbouw van het VO wordt aangeboden.

Kenmerkend in de informatiemaatschappij is dat computerprogramma's die informatie verwerken, gebruik maken van modellen van samenhangende variabelen. Gebruikers van dergelijke programma's zouden die wiskundige modellen idealiter op metaniveau moeten begrijpen. Dat vraagt om inzicht in variabelen en functies en de hierboven genoemde covariatie en calculus. Onderzoek laat zien dat dit type inzichten met dynamische software binnen het bereik van grote groepen leerlingen kan worden gebracht.

Bij *Informatie en onzekerheid* lijkt het accent te liggen op wat wel "informatieverwerking" wordt genoemd. Het aspect "onzekerheid", dat verwijst naar statistiek komt eigenlijk niet aanbod. Dit is merkwaardig omdat de informatie in de informatiemaatschappij in hoge mate statistisch van aard is. Bovendien zien we een explosieve groei van data-verzameling en data-analyse, die door de beschikbaarheid van krachtige computers mogelijk wordt gemaakt. Het belang van statistiek in de maatschappij zou ook door moeten klinken in de plek van statistiek in het onderwijs. Dit geldt zowel voor statistiek in beroepssituaties als de statistische bagage waar de gewone burger tegenwoordig over dient te beschikken. Los van specifieke inhouden, als verdelingen en de daarbij-horende visualisaties en kengetallen, correlatie en significantie, gaat het ook om inzicht in de afruil tussen statistische verheldering van structuur in data en het verlies van detail. Bovendien lijkt het van belang dat de leerlingen ook inzicht ontwikkelen in de mogelijkheden en gevaren van Big Data.

De grote opdracht *Veranderingen en Numerieke wiskunde* lijkt althans voor het eerste onderdeel een verdubbeling op te leveren met de grote opdracht, "Variabelen, verbanden en formules". Nu komen een aantal van de aspecten die we hierboven misten alsnog aan de orde. Maar de tekst is onduidelijk. Het lijkt erop dat "numeriek" wordt gekoppeld aan een discrete benadering en het gebruik van algoritmen. De aandacht voor technieken lijkt af te leiden van het door ons genoemde doel van het op meta niveau begrijpen van wiskundige modellen van samenhangende variabelen. Het lijkt zinvoller veranderingen onder te brengen bij "Variabelen, verbanden en formules". Daarnaast is het onderwerp "Numerieke wiskunde", annex, "benaderen", relevant voor de informatiemaatschappij. Hoewel het hier wel erg beknopt is uitgewerkt.

Het geheel overziend lijkt er veel aandacht voor doelen op PO niveau en veel minder voor doelen op VO niveau. De formele wiskunde, die voor de meer wiskundig georiënteerde richtingen van belang is, en de aansluiting naar vervolgopleidingen blijft onderbelicht.

*inhouds-overstijgende reken- en wiskundige bekwaamheden*

Hoewel de inhouds-overstijgende reken- en wiskundige bekwaamheden apart genoemd worden, gaat de ontwikkelgroep ervan uit dat deze bekwaamheden in principe in alle domeinen/grote opdrachten aan de orde komen. Dat lijkt terecht daar genoemde bekwaamheden een integraal onderdeel vormen van rekenen-wiskunde. In zekere zin is het merkwaardig dat ze apart genoemd moeten worden. Dat deze aspecten expliciet genoemd moeten worden, lijkt een resultaat van het loskoppelen van de doelen van wat rekenen-wiskunde in de kern is. In gangbare, operationele, doelformuleringen wordt reken-wiskunde impliciet of expliciet als gestolde kennis; een soort toolbox waar de leerlingen bij het maken van toetsopgaven gebruik van maken. Wanneer we er echter van uitgaan dat rekenen-wiskunde meer is dan het leren van gestolde kennis, dan vormen probleemoplossen, schematiseren, modelleren, logisch redeneren, abstraheren, representeren, wiskundig communiceren en algoritmisch denken, daar een onlosmakelijk onderdeel van. In die zin kunnen de huidige kerndoelen voor rekenen-wiskunde in het PO\* een inspiratiebron voor de ontwikkelgroep vormen. Deze worden vergezeld van een "karakteristiek", waarin we kunnen lezen wat de leerlingen nog meer leren dan de beschreven operationele kerndoelen,

“In de rekenwiskundeles leren kinderen een probleem wiskundig op te lossen en een oplossing in wiskundetaal aan anderen uit te leggen. Ze leren met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen. Het uitleggen, formuleren en noteren en het elkaar kritiseren leren kinderen als specifiek wiskundige werkwijze te gebruiken om alleen en samen met anderen het denken te ordenen, te onderbouwen en fouten te voorkomen.”

Het gaat hier om bekwaamheden waarvoor tegenwoordig extra aandacht wordt gevraagd, onder de noemer, "21st century skills". Deze "skills" zijn uiteraard niet nieuw, maar ze worden wel steeds belangrijker bij de toenemende digitalisering van de maatschappij. Het probleem met dit soort doelen is echter dat ze niet gevangen kunnen worden in de gangbare toetsen. In dit verband is echter het door de commissie Schnabel genoemde onderscheid tussen "meetbaar" en "merkbaar" interessant. Of leerlingen zich inhouds-overstijgende reken- wiskundige bekwaamheden eigen maken, kan door leraren worden opgemerkt. En, door het onderling uitwisselen van beschrijvingen van leerling-gedragingen die gezien worden als indicaties voor de hier genoemde bekwaamheden, kunnen leraren expertise ontwikkelen in het beoordelen wat een leerling zich op dit gebied heeft eigen gemaakt.

[)\* https://www.slo.nl/primair/kerndoelen/Kerndoelenboekje.pdf/download](/Users/MacBookKoeno/Library/Containers/com.apple.mail/Data/Library/Mail%20Downloads/DDA3E00A-F111-405C-BD05-0F0C736F5121/Uiteraard%20is%20er%20het%20probleem%20van%20het%20toetsen%20van%20wat%20leerlingen%20volgens%20deze%20beschrijving%20zouden%20moeten%20leren.%20Maar%20de%20commissie%20Schnabel%20%29%2A%20https%3A/www.slo.nl/primair/kerndoelen/Kerndoelenboekje.pdf/download)