

## **Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw:**

Reken-wiskundige kennis vooral nodig als aanvulling op wat computers kunnen

*Computers en gecomputeriseerde apparaten voeren steeds meer reken- en wiskundige bewerkingen uit. Volgens Koeno Gravemeijer, emeritus hoogleraar science- en techniekeducatie aan de Technische Universiteit Eindhoven, zal het onderwijs zich daarom moeten concentreren op reken-wiskundige kennis die complementair is aan wat deze apparaten doen. Hij bespreekt in dit artikel deze nieuwe kennis in drie brede categorieën: toepassen, begrijpen en globaal controleren. Hij richt zich voornamelijk op het reken als onderdeel van het rekenen-wiskundeonderwijs op de basisschool.*

Tekst: Koeno Gravemeijer

Bij discussies over onderwijs voor de toekomst gaat het al snel over de 21<sup>st</sup> century skills. In deze tijd van globalisering en computerisering worden vaardigheden of kwaliteiten als samenwerken, probleem oplossen, communiceren, flexibiliteit, creativiteit en dergelijke immers steeds belangrijker. De 21<sup>st</sup> century skills verwijzen naar vakoverstijgende aspecten. Dit raakt ook het reken-wiskundeonderwijs. Maar als we het onderwijs willen aanpassen aan de manier waarop de maatschappij verandert, dan zullen ook de doelen en inhouden van het vak moeten veranderen. Daarbij gaat het vooral om de impact van computers.

In de *The Guardian* (24 februari 2014) schetst een gerenommeerde voorvechter van computergebruik in het reken-wiskundeonderwijs, Conrad Wolfram, de kloof tussen wat er binnen en buiten de school gebeurt:

“In the real world we use computers for calculating, almost universally;  
in education we use people for calculating, almost universally.”

Vrij vertaald komt dat neer op: “In de echte werkelijkheid wordt al het rekenwerk door computers gedaan; in de scholen wordt al het rekenwerk door mensen gedaan.” Computers kunnen inmiddels alle reken- en wiskundige bewerkingen uitvoeren die in het basisonderwijs, het voorgezet onderwijs en het hoger onderwijs worden aangeboden. En zoals Wolfram aangeeft, wordt dit werk buiten de school in het algemeen ook aan computers of gecomputeriseerde apparaten overgelaten. Dit heeft uiteraard consequenties voor het onderwijs. Of, beter gezegd, zou consequenties moeten hebben. Tot nu toe is er in het reken-wiskundeonderwijs immers weinig te merken van de ingrijpende veranderingen die zich buiten de school voordoen. Het wordt dus de hoogste tijd om ons te verdiepen in de vraag hoe het reken-wiskundeonderwijs zou moeten veranderen om de leerlingen adequaat voor te bereiden op hun toekomst.

**rekenen-wiskunde als aanvulling**

Uiteraard is het te simpel ervan uit te gaan dat je geen reken-wiskundige kennis meer nodig hebt als apparaten het rekenwerk doen. Maar het is even ondoordacht om te veronderstellen dat de basisvaardigheden van vijftig jaar geleden nog allemaal even belangrijk zijn. Er is nog steeds reken-wiskundige kennis nodig, maar niet meer dezelfde. Het gaat in de toekomst om de reken-wiskundige kennis die je nodig hebt als *aanvulling* op wat computers kunnen. Het reken-wiskundeonderwijs dat geënt is op een tijd dat er nog geen computers waren, richt zich precies op die rekentaken die nu door computers worden overgenomen. Om het verschil duidelijk te maken kunnen we uitgaan van een overzichtje dat eerder genoemde Wolfram in een TED Talk geeft.

In de praktijk buiten de school, zegt hij, bestaat het bedrijven van wiskunde (annex rekenen) uit de volgende stappen:

- 1) een praktijkprobleem moet worden herkend als een probleem dat met wiskunde kan worden opgelost
- 2) dit probleem moet worden omgezet in een wiskundig probleem
- 3) het wiskundige probleem moet worden opgelost
- 4) De oplossing moet terugvertaald worden naar de oorspronkelijke probleemsituatie en op zijn relevantie beoordeeld worden.

Van deze vier stappen komt in het huidige onderwijs alleen de derde stap systematisch aan de orde. En dat is nu net de stap die steeds vaker door computers wordt uitgevoerd. Het ligt dus voor de hand de aandacht te verschuiven naar de andere drie stappen. Verder moeten we er rekening mee houden dat in de maatschappij van nu andere wiskundige onderwerpen belangrijk worden dan het pure rekenen. Denk bijvoorbeeld aan *Big Data*, of 3D-printen. Verder kunnen we denken aan begrippen als functies en variabelen die van belang zijn voor het begrijpen van de modellen van de werkelijkheid waar de computer mee werkt.

Maar laten we ons hier beperken tot het rekenen en de reken-wiskundige eisen die het werken in een gecomputeriseerde omgeving vraagt. De eerste twee stappen die Wolfram noemt betreffen het *herkennen* van rekenkundige problemen en het *vertalen* van dergelijke problemen in rekenhandelingen. Wanneer een apparaat deze rekenhandelingen uitvoert is het van belang om te *begrijpen* wat deze rekenhandelingen inhouden. En om de antwoorden te kunnen *interpreteren* en de juistheid en de zinvolheid ervan kunnen *evalueren*.

Het zien en doorzien van toepassingen speelt dus een belangrijke rol. Daarnaast is begrijpen belangrijk en het globaal kunnen controleren of de antwoorden kloppen of niet.

### **Toepassen moet breder**

Toepassen moet hier breder worden opgevat dan het oplossen van eenvoudige schoolboek-opgaven. Onderzoek van Steen (2001) laat zien dat er in de praktijk buiten de school vooral sprake is van het toepassen van eenvoudige wiskunde (rekenen) in complexe situaties. Zogeheten contextopgaven zijn wat dat betreft een stap in de goede richting. Mits recht wordt gedaan aan de context. Wanneer er te snel wordt overgegaan van de context naar de berekening blijft er van het toepassen weinig over en gaat het

onderwijs alleen over hoe je het rekenwerk uitvoert. In plaats daarvan dient juist aandacht te worden besteed aan het bewust maken van wat de context precies inhoudt en het redeneren over hoe de rekenbewerking logisch volgt uit het contextprobleem. Het is dit type redeneren dat essentieel is voor het gebruik van rekenapparaten en voor het nadenken over de relatie tussen wat die apparaten doen en de problemen waar ze voor worden ingezet.

### **Meer ruimte voor begrijpen**

Wanneer de computer het werk doet, moet de gebruiker op een globaal niveau begrijpen wat de computer doet. In het klassieke rekenonderwijs was er altijd een spanning tussen begrijpen en beheersen. Begrijpen is mooi, maar het gaat er toch vooral om dat de leerlingen allerlei opgavetypen leren beheersen. Daardoor komt het begrijpen als regel in het gedrang. Nu de computer het precieze rekenwerk doet, wordt die concurrentiedruk minder en kan er meer ruimte komen voor begrijpen. Daarmee kan mogelijk ook een oplossing worden geboden voor de problemen die ontstaan als je je eenzijdig richt op beheersing. In reken-wiskundeonderwijs dat zich richt op beheersing, ontstaat een focus op procedures die zijn toegesneden op specifieke opgaven/opgavetypen. Op zich is er veel te zeggen voor deze aanpak. Dit is immers wat er als regel wordt getoetst, of de leerlingen bepaalde opgaven correct kunnen beantwoorden. Bovendien kunnen de procedures voor het generen van correcte antwoorden op specifieke opgaven goed worden geoefend. En dat levert succeservaringen op voor leerlingen en leraren. Problematisch aan deze aanpak is echter dat de antwoorden op de opgaven worden gezien als een doel op zich en niet als het langetermijnresultaat van het bereiken van diepere reken-wiskundige inzichten. Het gevolg is dat opgavetypen geïsoleerd van elkaar worden aangeboden en ingeoeffend, terwijl de onderliggende wis- annex rekenkundige inzichten worden genegeerd. Dit leidt tot losse stukjes opzichzelfstaande kennis en onbegrepen regeltjes die gemakkelijk door elkaar worden gehaald. Het gevolg is niet alleen dat voor de toekomst belangrijke inzichten, niet worden bereikt. Maar de verkregen vaardigheid is bovendien uiterst kwetsbaar. Er zal dus een verschuiving nodig zijn van op beheersing gericht reken-wiskundeonderwijs naar op inzicht gericht reken-wiskundeonderwijs. Dit impliceert een verschuiving van een focus op procedures naar een focus op relaties tussen getallen, getallen als objecten en relaties tussen operaties.

### **Globaal controleren**

In het algemeen is het voldoende om antwoorden te controleren door globaal te rekenen. Globaal rekenen houdt in dat je de getallen aanpast om de berekening te vereenvoudigen. De basis voor het globaal te rekenen ligt in het flexibel omgaan met getalrelaties, rekenen met nullen en eigenschappen van rekenoperaties. Ik zal dit illustreren met een eenvoudig voorbeeld, dat ik eerder in het tijdschrift *Volgens Bartjens* uitwerkte (Gravemeijer, 2015). Bij een opgave als  $4 \times 27$  kan een leerling bedenken dat het antwoord ruim  $4 \times 25 = 100$  is, een andere leerling denkt dat het minder is dan  $4 \times 30 = 120$ . En weer een andere leerling realiseert zich, dat er  $2 \times 54 = 108$  uitkomt. Bij het

globaal rekenen is het niet van belang of de leerlingen de combinatie van mooie getallen gebruiken die wij in gedachte hebben. Het gaat erom dat de leerlingen een bij de situatie passende getalrelatie kiezen waar ze zeker van zijn.

Om leerlingen succesvol te laten zijn, moeten we ervoor zorgen dat ze een repertoire aan getalrelaties ontwikkelen waar ze goed mee uit de voeten kunnen. Voor vermenigvuldigen kunnen we bijvoorbeeld denken aan veelvouden van 25, naast  $4 \times 25 = 100$ , bijvoorbeeld  $3 \times 25 = 75$  en  $5 \times 25 = 125$ , en het kunnen relateren van deze getallen aan kommagetallen ( $3 \times 0,25 = 0,75$ ,  $5 \times 0,25 = 1,25$ ), breuken ( $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ,  $4 \times \frac{1}{4} = 1 \frac{1}{4}$ ) en procenten ( $3 \times 25\% = 75\%$ ,  $5 \times 25\% = 125\%$ ). Het gaat uiteindelijk om netwerken van getalrelaties, die de leerlingen kunnen uitbreiden door flexibel gebruik te maken van eigenschappen van rekenoperaties, zoals de commutatieve eigenschap ( $25 \times 4 = 4 \times 25$ ), de associatieve eigenschap ( $12 \times 25 = 3 \times 4 \times 25 = 3 \times 100$ ) en de distributieve eigenschap ( $12 \times 25 = 10 \times 25 + 2 \times 25$ ).

De noodzaak van ontwikkelen van rekenkennis op het gebied van toepassen, begrijpen en globaal rekenen waar de leerlingen in de toekomst over moeten beschikken vraagt een heroverweging van de inhoud van het reken-wiskundeonderwijs. Het wordt tijd dat daar discussie over komt en dat scholen gaan experimenteren met ander reken-wiskundeonderwijs.

## CV

Koeno Gravemeijer is emeritus professor science- en techniekeducatie aan de Technische Universiteit Eindhoven. Zijn onderzoek betreft onder meer vakspecifieke onderwijstheorieën en het gebruik van ICT. Zijn belangstelling gaat vooral uit naar reken- en wiskundeonderwijs dat leerlingen voorbereidt op de maatschappij van de toekomst.

**Correspondentieadres:** koeno@gravemeijer.nl

## Literatuur

- Gravemeijer, K. (2015). Rekenen met perspectief, Reken-wiskundeonderwijs dat leerlingen voorbereidt op de maatschappij van de 21<sup>e</sup> eeuw. *Volgens Bartjens*, 34 (4), 4-7.
- Steen, L.A. (2001). Data, Shapes, Symbols: Achieving Balance in School Mathematics. In: Steen, L.A. (ed.), *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy* (pp. 53-74). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.