



Tussen droom en daad¹

- op zoek naar een repertoire van leraren voor interactief georiënteerd reken-wiskundeonderwijs -

H.A.A. van Eerde
Flsme, Universiteit Utrecht

Het reken-wiskundeonderwijs ligt onder vuur. De ontwikkeling van een helder standpunt en een zekere consensus over vakdoelen, vakinhouden en vakdidactiek kan onze positie versterken, zowel binnen de eigen kring, alsook in de communicatie met de wereld buiten ons vakgebied. Van verschillende kanten worden inmiddels aanzetten gegeven voor een vruchtbare discussie over de diverse aspecten van ons reken-wiskundeonderwijs en de pabo-opleiding die kan bijdragen aan een nieuwe standpuntbepaling.

In dit artikel staat de vraag centraal over welk reken-wiskundig repertoire leraren zouden moeten beschikken om interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs te geven.

1 Inleiding

Uit een enquête onder deelnemers aan de Panamaconferentie van januari 2007 over de toekomst van het reken-wiskundeonderwijs blijkt dat er geen al te grote meningsverschillen zijn. Men vindt dat in het onderwijs de nadruk vooral moet liggen op inzicht en betekenisverlening (Van Gool & Den Hertog, 2008) en men is het in grote lijnen eens over de vakinhoud van het vakgebied. Men is over de vakdidactiek echter minder eensluidend, waarbij opvalt dat men het onderscheid tussen vakgebied en vakdidactiek lastig vindt. Van Gool en Den Hertog merken terecht op dat dit de discussie vertroebelt.

Gravemeijer (2001) heeft een discussie op gang gebracht over de doelen van het reken-wiskundeonderwijs in het perspectief van een veranderende maatschappij in de 21^{ste} eeuw. Dit tijdsgewricht vraagt om andere kennis en vaardigheden. Vanuit zijn visie op de toekomst van het reken-wiskundeonderwijs maakt hij onderscheid tussen consequenties voor de korte termijn en voor de lange termijn. Voor de korte termijn noemt hij enkele inhoudelijke punten zoals globaal, handig rekenen, noteren van tussenoplossingen en inzicht in procenten en kommagetallen. Daarnaast schrijft hij dat er:

... zo snel mogelijk werk gemaakt moet worden van meer interactief, probleemgeoriënteerd rekenonderwijs.
(Gravemeijer 2007, pag.9).

Ook in het opleidingsonderwijs vindt een discussie plaats over het reken-wiskundeonderwijs. Zo schreven Oonk, Van Zanten en Keijzer (2007) in dit tijdschrift een artikel waarin ze een aanzet geven voor de ontwikkeling van

curriculumelementen voor de professionele gecijferdheid van pabo-studenten. Ook de Panamagroep van opleiders heeft, op basis van praktijkverhalen in het opleidingsonderwijs, zes bakens ontwikkeld voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo (Van Zanten en Van Gool, 2007). De verwezenlijking van probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs blijft echter een punt van zorg. In de praktijk is er veel goeds te zien, maar de indruk bestaat dat er meer mogelijk moet zijn.

Weten we eigenlijk wel over welke vakinhoudelijk en vakdidactisch repertoire leraren zouden moeten beschikken om interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs te geven? En hoe zou dit repertoire ontwikkeld kunnen worden? Voor de verdere ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs, evenals voor de opleiding en voor de professionalisering van 'zittende' leraren lijkt een discussie over deze vragen cruciaal.

Ik richt mij in deze bijdrage vooral op de vraag welk reken-wiskundig repertoire leraren nodig hebben om interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven en vertrek vanuit de vraag naar de betekenis van het begrip *guided reinvention*, waarbij ik me vooral op *guided* richt.

Daarna ga ik in op de proactieve rol van de leraar bij interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs. Vervolgens probeer ik een mogelijk repertoire van leraren in dergelijk reken-wiskundeonderwijs te beschrijven. Vanuit dit perspectief analyseer ik een praktijkvoorbeeld. In een slotbeschouwing doe ik enkele suggesties voor de ontwikkeling van een dergelijk repertoire. Ik bepleit ook onderzoek en ontwikkelwerk om meer zicht te krijgen op dit repertoire en de ontwikkeling ervan.

2 Guided reinvention

Guided reinvention is een van de didactische principes die Freudenthal (1991) onderscheidde om recht te doen aan het resultaat van de fenomenologische analyse. Wat bedoelt Freudenthal met dat begrip *guided reinvention*? Hij was van mening dat kinderen door een proces van mathematiseren, de wiskunde zelf zouden kunnen heruitvinden. Maar daarbij wel geholpen door de leraar. Freudenthal noemt *inventions*, dat zijn stappen in het leerproces die de leerling neemt. De onderwijsomgeving waarin dit leerproces plaatsvindt, duidt hij aan met *guided*. Het gaat er volgens hem om om de mate van *guidance* aan te passen aan de leerlingen. Wie slim is, kan een bepaald aspect van de wiskunde zelf uitvinden, wie minder slim is, heeft hulp en leiding nodig. De kern van deze gedachte is dat leerlingen eigen denkwegen zoeken en daarbij zoveel of zo weinig begeleiding krijgen als ze nodig hebben. In Freudenthals eigen woorden:

... guided reinvention means striking a subtle balance between the freedom of inventing and the force of guiding, between allowing the learner to please himself and the teacher and asking him to please the teacher.
(Freudenthal, 1991 pag.48).

Freudenthal zag het proces van *guided reinvention*, zoals hij in zijn boek in 1973 beschreef, als een uitwerking van de Socratische methode. Het verschil is dat bij de Socratische methode, althans in de oervorm, het denkwerk vooral verricht wordt door de gespreksleider, terwijl Freudenthal juist de leerlingen het denkwerk wil laten verrichten. De overeenkomst is dat men in beide benaderingen vooruit probeert te lopen op mogelijke leerprocessen van leerlingen. Om op leerprocessen te kunnen anticiperen zouden leraren en methodeschrijvers volgens Freudenthal gedachte-experimenten moeten uitvoeren.

In didactics I mean by thought experiment the attitude of a teacher or textbook author of imagining a student or a group of students and teaching them in his thoughts while reacting in advance to their probable reactions. The imaginary students are active, and their activity allows the teacher to determine his way. (Freudenthal 1973, pag.100)

Om het leerproces van leerlingen te kunnen begeleiden, zouden leraren zich dus een voorstelling moeten proberen te maken van hoe de les zou kunnen verlopen en hoe ze zouden kunnen reageren op mogelijke reacties van leerlingen. Simon (1995) heeft het dilemma tussen het ruimte bieden voor de eigen constructies van leerlingen en het begeleiden van het leerproces geïntegreerd in het idee van het hypothetische leertraject. De beschrijving van zo'n hypothetisch leertraject omvat de wiskundige problemen die aan leerlingen worden voorgelegd, de veronderstelde denkhandelingen van de leerlingen, en de handelingen die de leraar zou moeten uitvoeren om wis-

kundige leerprocessen te bevorderen. Freudenthal zegt dat veel van het proces van *guiding* niet naspeurbaar is. Hij gaat er in zijn idee over gedachte-experimenten impliciet vanuit dat de leraar over voldoende kennis en vaardigheden beschikt om te bepalen hoe hij het proces van *reinvention* begeleidt. Dit roept de vraag op om welke kennis en vaardigheden het eigenlijk gaat. Freudenthal stelt in zijn laatste publicatie uit 1991 drie vragen over *guided reinvention*: *Guiding - where to? Guiding - where? Guiding - how?* Zijn antwoord op de eerste vraag, waarheen *guided reinvention* zou moeten leiden, luidt: naar de 'mathematische activiteit', naar het mathematiseren en niet in de eerste plaats naar de wiskunde, naar het abstraheren eerder dan naar abstracties, naar formaliseren eerder dan naar formules, en eerder naar algoritmiseren dan naar algoritmen. Freudenthal wil hiermee vermoedelijk benadrukken dat het hem om de wiskundige activiteit gaat, dus om het proces.

Bij de tweede vraag, waar het proces van *guiding* plaats moet vinden, geeft Freudenthal een overzicht van vakinhoudelijke onderwerpen, van het leren tellen tot goniometrische functies, geïllustreerd met voorbeelden in een wisselende fenomenologische, historische en vakdidactische context. De derde vraag is: hoe het proces van *guiding* eruitziet. Freudenthal schetst hier het beeld van een balans tussen de kracht van het onderwijzen en de vrijheid van leren van de leerlingen. Hij is van mening dat veel van dit proces van *guiding* niet naspeurbaar is. Observaties ziet hij als mogelijke bron om te begrijpen wat *guiding* is.

Freudenthal zegt alleen ervaring te hebben met onderwijs aan individuele leerlingen. Een dergelijke individuele onderwijsleersituatie, waarin de leraar onbeperkte mogelijkheden heeft om te improviseren en de leerling te ondersteunen in zijn leerproces, is volgens hem geen norm voor de dagelijkse onderwijspraktijk. Op zo'n wijze lesgeven in een klas vol leerlingen is volgens Freudenthal alleen weggelegd voor genieën. Hij pleit daarom voor interactieve instructie, niet alleen tussen leraar en leerlingen (verticale interactie), maar zeker ook tussen leerlingen onderling met de leraar op de achtergrond (horizontale interactie), die de leerlingen alle ruimte geeft om te improviseren en het wiskundig inzicht te ontwikkelen.

In een beschouwing over de kernideeën van Freudenthal over didactiek en curriculumtheorie schrijven Gravemeijer en Terwel (2000) dat Freudenthal bij *guided reinvention* eerder het karakter van het leerproces benadrukte dan het invention-proces op zich. Centraal staat volgens hen dat de leerling de kennis moet ervaren als eigen, persoonlijke kennis waarvoor hij zelf verantwoordelijk is. De leraar zou zijn leerlingen de gelegenheid moeten geven hun eigen wiskundige kennis te ontwikkelen.

More precisely, the idea is that teaching matter is re-invented by students in such interaction.
(Gravemeijer & Terwel 2000, pag.786)

Als inspiratiebron voor het *reinvention* proces noemde Freudenthal de geschiedenis van de wiskunde. Gravemeijer en Terwel voegen hieraan toe dat later duidelijk werd dat ook de informele strategieën van kinderen een inspirerende bron zijn voor reinvention processen (zie bijvoorbeeld Streefland, 1990).

In zijn voordracht ter gelegenheid van zijn afscheid van de Universiteit Utrecht (op 6 juni 2008) signaleerde Gravemeijer een spanning tussen de begrippen *guided* en *reinvention*. Het begrip *guided* verwijst naar een min of meer begeleidende rol van de leraar, *reinvention* (heruitvinden) roept eerder een beeld op van denkwerk op eigen initiatief. Gravemeijer wees in dit verband op verschillen in opvatting binnen de realistische benadering over de mate waarin de leraar het leerproces moet begeleiden. Hij noemde het ontwerpen van een hypothetische leerroute, het op gang brengen van de juiste discussies en het stellen van de juiste vragen als kernaspecten van *guided reinvention*. Deze hypothetische leertrajecten kunnen richting geven aan de dagelijkse praktijk, aan het onderwijsleerproces van een of meer lessen. Bij het ontwikkelen van een hypothetisch leertraject zou een lokale onderwijstheorie steun moeten bieden. Een dergelijke lokale onderwijstheorie omvat een beschrijving van het leerproces van leerlingen over een langere periode rond een bepaald vakinhoudelijk onderwerp, zoals vermenigvuldigen of breuken, een beschrijving van de middelen die kunnen worden gebruikt en van de manier waarop de leraar het leerproces kan ondersteunen (Gravemeijer, 2004). In leerprocessen die zich over langere tijd uitstrekken komt het aspect van *reinvention* tot uitdrukking. Gravemeijer merkte op dat *reinvention* betrekking heeft op kerninzichten uit de wiskunde, op *big ideas*, wiskundige kernideeën die aanleiding kunnen zijn tot grote sprongen in de ontwikkeling van het redeneren van kinderen. Samen met wiskundige modellen en strategieën van kinderen vormen deze *big ideas* de ingrediënten voor de ontwikkeling van hypothetische leertrajecten (Fosnot & Dolk, 2003).

De vraag is nu over welk repertoire leraren moeten beschikken om hypothetische leertrajecten te ontwikkelen. En om de juiste vragen te stellen en de juiste discussies op gang te brengen in interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs.

3 Interactief reken-wiskundeonderwijs

Interactie is een van de kenmerken van realistisch reken-wiskundeonderwijs (Treffers, 1987). In veel reken-wiskundelessen vindt ook een of andere vorm van interactie plaats, waarin leraren en leerlingen met elkaar praten. Dit kan horizontale interactie zijn tussen leraar en leerlingen of verticale interactie tussen leerlingen onderling

(Mercer, 1999). Nelissen (2002) voegt daar een combinatie van beide aan toe en noemt dit simultane interactie. De aard en de intensiteit van de interactie hangen af van het doel van de les. De ene les vereist meer en verdergaande interactie dan de andere. Een hoofdrekenles met het doel te oefenen, een les om handig rekenen verder te ontwikkelen, of een les waarin het om een verdieping van inzicht in het begrip breuken gaat, verschillen veel. In de ene les zal meer klassikale interactie plaatsvinden en in de andere meer interactie in groepjes. En in een les waarin veel zelfstandig gewerkt wordt, kunnen interactieve gesprekken tussen leraar en een individuele leerling gebruikt worden om extra hulp te bieden. Soms is er weinig of geen interactie in een les nodig en kunnen de leerlingen toch iets nieuws leren van een heldere uitleg of het geleerde oefenen.

Hoe meer de leraar stuurt, hoe minder ruimte er is voor de inbreng van leerlingen. Als een leraar veel uitleg geeft, veel gesloten vragen stelt en de rol van de leerlingen beperkt blijft tot het geven van korte antwoorden waarop de leraar feedback geeft, is er weliswaar interactie maar het is de vraag hoeveel de leerlingen ervan leren. Dit vraag-en-antwoordspel dat bekend staat als IRE-patroon - Initiatief (vraag), Respons (antwoord) en Evaluatie (beoordeling) - is niet het type interactie dat we op het oog hebben. Maar ook in gevallen dat leerlingen wel inbreng hebben, kan interactie te weinig opleveren. Denk bijvoorbeeld aan de soms te langdurige gesprekken over contexten waarbij geen verband wordt gelegd met het mathematiseren van de wiskunde, of het inventariseren van alle verschillende oplossingen van leerlingen zonder dat daar verder op wordt ingegaan.

Daarom stellen we de vraag wat leerzame interactie inhoudt; welke interactie aan het leren van de leerlingen kan bijdragen. Leerzame interactie vindt plaats als de interactie het denken van leerlingen bevordert en ondersteunt. Hiervoor is de inbreng van leerlingen onmisbaar. Immers, pas als de denk- en werkwijzen van leerlingen onderwerp van gesprek worden, kan de leraar hier zicht op krijgen en de ontwikkeling van deze denk- en leerprocessen stimuleren.

Essentieel bij interactie is de vraag wie tijdens de interactie het denkwerk verricht: de leraar, de leerlingen of beiden? Het antwoord zal 'beiden' moeten zijn, maar ieder op een eigen manier. Het denken van de leraar is erop gericht om bij leerlingen het proces van mathematiseren te stimuleren, niveauperhogingen te bewerkstelligen en om de interactie zo goed mogelijk te orkestreren. Het denken van de leerlingen is gericht op het oplossen van wiskundige problemen en het redeneren daarover.

Om tot leerzame interactie te komen, zouden leraren moeten leren zich een voorstelling te maken van wat er bij de interactie zou kunnen gebeuren: van de mogelijke inbreng van leerlingen bij de aanpak van bepaalde problemen en van de inbreng van de leraar om het leerproces

te bevorderen. Leraren die hun lessen voorbereiden door te denken in termen van zulke hypothetische leertrajecten van kinderen veranderen van perspectief: van een *observer's point of view* naar een *actor's point of view*, van het denken over welke problemen ze de leerlingen gaan voorleggen, naar het denken over het leren van leerlingen en wat daarvoor nodig is.

4 De leraar in interactief, probleemgeoriënteerd onderwijs

Socio-constructivistische en sociaal-culturele theorieën bieden aanknopingspunten voor een nadere uitwerking van de rol van de leraar in interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs. Ik ga op enkele aspecten in, waarbij ik mij beperk tot klassikale interactie en de rol van de leraar bij groepswork buiten beschouwing laat. In deze theoretische perspectieven staat de rol van interactie bij de constructie van kennis centraal. Beide benaderingen benadrukken het belang van de eigen activiteit van de leerling en van de proactieve rol van de leraar, alsmede de afspraken die gemaakt moeten worden over doel en aard van de interactie. De benaderingen zijn niet zozeer tegengesteld als wel complementair (Cobb, 1994; Cobb & Yackel, 1996).

In socio-constructivistische kring zijn naast de uitwerking van hypothetische leertrajecten (Simon, 1995), waardevolle ideeën ontwikkeld over de rol van de leraar in de ontwikkeling van een vruchtbare klassencultuur (Cobb & Yackel, 1996). Interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs vereist andere sociale normen in de klas dan traditioneel rekenonderwijs. Deze normen hebben betrekking op de verwachtingen die men heeft ten aanzien van de rolverdeling tussen leraar en leerlingen. In interactief, probleemgeoriënteerd onderwijs verwacht de leraar dat leerlingen zelf naar oplossingen zoeken, vertrouwen op hun eigen denken, hun oplossingen uitleggen en verantwoorden, elkaar proberen te begrijpen, vragen stellen en discussiëren als ze het niet met elkaar eens zijn. Deze normen zijn geen eenzijdige afspraken, maar moeten tot ontwikkeling komen en door de leerlingen ervaren worden in klassengesprekken. Ze zijn af te leiden uit de vragen die de leraar stelt, de reacties van de leerlingen en de manier waarop de leraar reageert op antwoorden van leerlingen, en uit welke antwoorden beloond worden en welke niet (Cobb & Yackel 1996, Gravemeijer, 1995). Naast sociale normen spelen er normen over wat wiskunde is en over de opvattingen van de leraar over de betekenis van wiskundige kennis voor zijn leerlingen; dit worden *socio mathematical norms* genoemd (Cobb & Yackel, 1996). Deze normen

bepalen wat als een wiskundig probleem wordt gezien, wat wiskundig gezien als een andere oplossing of als een efficiënte(re) oplossing wordt opgevat, en wat als een aanvaardbare uitleg wordt geaccepteerd.

In de sociaal-culturele benadering is veel aandacht voor de rol van de leraar. Men benadrukt de explicitering van normen om de verwachtingen tussen leraar en leerlingen op elkaar aan te laten sluiten, aangeduid met de term 'didactisch contract' (Elbers, 1993). Van Parreren (1988) noemt probleemgeoriënteerd onderwijs 'banend onderwijs'. De leraar zet een brede baan uit waarbinnen de leerling veel ruimte krijgt om problemen op te lossen, waarbij de leraar - waar nodig - het leerproces begeleidt en bijstuurt. In deze benadering gaat men er tevens vanuit dat de leraar het onderwijs zou moeten richten op activiteiten in de zône van naaste ontwikkeling, zoals bekend een centraal begrip in de theorie van Vygotskij. Hierbij gaat het om activiteiten die leerlingen nog niet zelfstandig kunnen uitvoeren, maar wel met hulp van een volwassene. Van Parreren (1988) werkte dit idee uit in 'Ontwikkeld onderwijs', onderwijs dat vooruit loopt op de ontwikkeling van kinderen; deze als het ware voortstuwt. Bij de verdere uitwerking van het idee van de zône van naaste ontwikkeling introduceerde Bruner (1986) het begrip *scaffolding* (letterlijk 'steigers aanbieden') voor de hulp die een leraar aan leerlingen kan bieden in de zone van naaste ontwikkeling.

Mercer (1999) heeft veel onderzoek gedaan naar de manier waarop leraren hun leerlingen kunnen stimuleren en uitdagen bij de constructie van kennis, door 'samen te praten' en 'samen te denken', met de hele klas en in groepjes. Dit onderzoek heeft geresulteerd in concrete uitwerkingen van soorten gesprekken die leraren met leerlingen en leerlingen onderling kunnen houden van grondregels voor samenwerken en van strategieën waarmee leraren de interactie op gang kunnen brengen en houden. Inmiddels zijn de leereffecten van deze benadering van 'samen denken' ook aangetoond (Mercer, 2007). Nelissen en Van Oers (2000) beschrijven diverse vormen van interactieve uitleg die een leraar tijdens de rekenles kan geven en soorten vragen die leraren aan hun leerlingen kunnen stellen om hun denkprocessen te stimuleren.

In het kader van ontwikkelingsonderzoek zijn voor het reken-wiskundeonderwijs een interactieve werkwijze en diagnostische instrumenten ontwikkeld met de naam 'Kwantiwijzer'. In de 'Kwantiwijzer' wordt onder meer beschreven en concreet uitgewerkt hoe men probleemsituaties gemakkelijker of moeilijker kan maken, welke typen vragen gesteld kunnen worden om de zône van naaste ontwikkeling te verkennen en denkprocessen te stimuleren, alsmede op welke wijze hulp geboden kan worden aan leerlingen met rekenproblemen (Van Eerde, Van den Berg & Lit, 1992; Van Eerde, 1996).

5 Vakinhoudelijk en vakdidactisch repertoire

Wie interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskunde-onderwijs wil geven, dient te beschikken over een breed vakinhoudelijk en vakdidactisch repertoire. In diverse publicaties worden pogingen gedaan om de vraag te beantwoorden welk repertoire dan aan de orde is.

In eerste instantie gaat het om de gecijferdheid van de leraar zelf. In de praktijk blijkt dit begrip nog niet eenduidig gebruikt te worden. In een recent artikel in dit tijdschrift geven Oonk, Van Zanten en Keijzer (2007) een analyse van de ontwikkeling en het gebruik van het begrip gecijferdheid. Vanuit de gedachte van een groeiende professionele ontwikkeling van leraren basis-onderwijs werken zij het idee uit hoe gecijferdheid in dienst staat van het didactisch handelen van de leraar. Ze spreken dan ook van een specifieke professionele gecijferdheid van leraren. In de continue ontwikkeling van deze gecijferdheid gaat het aanvankelijk om het zelf aanpakken van reken-wiskundige problemen, waarna de aandacht geleidelijk aan verschuift naar het interactieve, vakdidactische aspect en het kunnen inspelen op de inbreng van leerlingen. De auteurs onderscheiden vier kenmerken van gecijferdheid: het verwerven van elementaire rekenvaardigheid, het herkennen van wiskunde in de eigen omgeving en die van kinderen, het gericht zijn op oplossingsprocessen bij het laten oplossen van reken-wiskunde problemen onder andere door reflectie op eigen en andermans oplossingen, en tenslotte het inspelen op het wiskundig denken van leerlingen onder andere door te anticiperen op hun denkprocessen en hen te stimuleren tot niveauverhoging. Bij dit laatste punt wordt het mathematiseren als het ware verstrengeld met het didactiseren' (Oonk, Van Zanten & Keijzer, 2007, pag.15).

De Panamagroep van opleiders ontwikkelden op basis van praktijkverhalen uit het opleidingsonderwijs zes bakens voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo (Van Zanten & Van Gool, 2007). Deze bakens bieden volgens hen perspectief op opleidingsonderwijs met voldoende kwaliteit. We zien eigen gecijferdheid en didactiek in deze bakens samenkomen in een zich ontwikkelende professionele gecijferdheid.

De verstrengeling van vakinhoudelijke en vakdidactische bekwaamheden komt in de internationale literatuur terug onder de termen *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) en omvat alle kennis die een leraar nodig heeft om reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven. Dit begrip kan gezien worden als een uitwerking voor het vak rekenen en wiskunde van het begrip *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), waarin pedagogische en vakdidactische elementen geïntegreerd zijn en als kenmerkend gezien worden voor de professionaliteit van vakleraren (Shulman, 1986; Van Driel, 2008).

In MKT moet het begrip kennis breed worden opgevat, het

omvat ook inzicht en vaardigheden. MKT vormt de kern van goed leraarschap. De praktijkervaring van de leraar is hiervoor een belangrijke bron. Thames, Sleep, Bass en Ball (2008) ontwikkelden op basis van diverse onderzoeken, waarin onder meer de klassenpraktijk werd geanalyseerd, vier domeinen binnen MKT. Allereerst noemen zij *common content knowledge*, de vakinhoudelijke kennis en vaardigheden dus waarover leraren zoals alle burgers zouden moeten beschikken. Dit komt overeen met elementaire gecijferdheid. Een tweede domein is *specialized content knowledge*, de specifieke vakkennis en vaardigheden die uniek zijn voor leraren. Dit betreft bijvoorbeeld wiskundige problemen aanpassen om ze eenvoudiger of moeilijker te maken, wiskundige inhouden representeren, een goed voorbeeld geven om iets duidelijk te maken, weten hoe je iets uit kunt leggen en foutenanalyses maken. Dit komt overeen met wat Van Zanten en Keijzer (2007) professionele gecijferdheid noemen. Het belang hiervan blijkt uit onderzoek. Dat laat zien dat de wiskundige kennis van basisschoolleraars significant samenhangt met de resultaten die hun leerlingen boeken (Hill, Rowan & Ball, 2005).

Het derde domein, *knowledge of content and teachers*, betreft de relatie tussen kennis over het wiskundig denken van de leerlingen en het eigen wiskundig begrip van de leraar. Bij de kennis over het reken-wiskundig denken van leerlingen gaat het bijvoorbeeld om kennis over het globale verloop van leerprocessen, over de verschillende denk- en werkwijzen die leerlingen hanteren en over mogelijke hobbels en valkuilen voor leerlingen. Leraren moeten op grond van deze kennis kunnen voorstellen hoe leerlingen zullen reageren op een bepaalde opgave, en of ze de betreffende opgave moeilijk of makkelijk zullen vinden. Deze kennis is nodig om te kunnen anticiperen op wat leerlingen doen en te interpreteren wat leerlingen zeggen.

Het vierde en laatste domein is *knowledge of content and teaching*. Het betreft een combinatie van vakdidactische en wiskundige kennis. Leraren moeten bepaalde inhouden ordenen, keuzen maken welk voorbeeld eerst wordt besproken en welke voorbeelden gebruikt kunnen worden om het leerproces te verdiepen, weten hoe leerlingen reageren op bepaalde problemen, bepalen op welke inbreng van leerlingen ze zullen ingaan en op welke niet, en weten wat de voor- en nadelen zijn van het gebruik van bepaalde representaties bij bepaalde wiskundige onderwerpen.

In deze laatste twee domeinen wordt het ontwikkelen van een hypothetisch leertraject zichtbaar. Er wordt herkenbaar wat Van Zanten en Van Gool (2007) de verstrengeling van mathematiseren en didactiseren noemen. Naast een breed vakinhoudelijk en vakdidactisch repertoire wordt in deze indelingen ook impliciet van bepaalde kennis en vaardigheden uitgegaan, die echter niet worden geëxpliciteerd. Zo hebben leraren bepaalde interactieve

vaardigheden nodig, maar deze worden nergens expliciet gemaakt. Twee andere essentiële voorwaarden die niet expliciet wordt genoemd, zijn de sociale en wiskundige normen. Deze zijn onlosmakelijk verbonden met vakinhoudelijke en vakdidactische aspecten en zouden mijns inziens aangevuld en geëxpliciteerd moeten worden in het repertoire. Een veilig pedagogisch klimaat kunnen creëren is natuurlijk een voorwaarde voor dit alles. Het is uiteraard een vakoverstijgend aspect. Overigens ben ik van mening dat leerzaam, interactief natuurlijk onderwijs veel kan bijdragen aan een goed pedagogisch klimaat.

6 Aanvullingen

Laat ik enige aanvullingen geven op het beschreven repertoire van leraren. Het gaat hierbij met name om het in gang zetten, in gang houden en orkestreren van de interactie en om de sociale en wiskundige normen die in de klas spelen. Van interactieve vaardigheden kunnen de volgende aspecten worden genoemd:

- 1 Het gericht observeren van leerlingen door waar te nemen wat ze doen, te luisteren naar wat ze zeggen en te lezen wat ze opschrijven.
- 2 Het stellen van vragen om leerlingen aan het denken te zetten, gesprekken op gang te brengen en in gang te houden, vooral om hun wiskundig denken te bevorderen. Het is tevens van belang te weten welk type vraag welk soort reacties oproept.
- 3 Het non-verbaal handelen bewust inzetten om participatie van leerlingen te bevorderen, de interactie te ondersteunen en denkprocessen te stimuleren.
- 4 Reageren en inspelen op wat leerlingen inbrengen, onder meer door het stellen van vragen en vervolgvragen om te begrijpen wat ze bedoelen (doorvragen). Het herformuleren wat een leerling zegt, om het ook voor andere leerlingen begrijpelijk te maken. Het stellen van vragen om verdieping en niveauverhoging in het leren aan te brengen.
- 5 Het bevorderen van reflectie bij leerlingen, zodat deze over hun eigen wiskundig handelen, en dat van hun medeleerlingen, nadenken.
- 6 In samenspraak met de leerlingen tussentijds vaststellen wat er geleerd is.
- 7 Het aanbieden van diverse vormen van hulp die aansluiten bij leerprocessen van leerlingen.

Wat betreft de normen in de klas, zijn de volgende kernaspecten in te onderscheiden:

- 1 Het ontwikkelen van sociale normen (*social norms*) in de klas.
- 2 Het ontwikkelen van wiskundige normen (*socio-mathematical norms*) en deze hanteren bij de beoordeling van oplossingen van leerlingen in verschillende fasen van het onderwijsleerproces.

De vier elementen uit het hiervoor beschreven repertoire

van Thames c.s. (2008) en de aanvullende elementen over interactie en de gehanteerde normen, gebruik ik als voorlopig kader om in de volgende paragraaf een voorbeeld van 'goede praktijk' te analyseren bij mijn zoektocht naar het vakrepertoire van een ervaren leraar basisonderwijs.

7 De 'goede praktijk'

Freudenthal heeft steeds het belang van observeren benadrukt, ook als bron voor onderzoek naar leerprocessen. Om zicht te krijgen in het vakrepertoire van leraren, kunnen we veel leren door leraren te observeren. Voorbeelden van *good practice*, tegenwoordig ook wel *promising practice* genoemd, kunnen een stimulerende rol spelen bij de discussie over verschijningsvormen van realistisch reken-wiskundeonderwijs en over het repertoire dat gewenst is om het te realiseren.

In het volgende presenteer en analyseer ik een transcript van een op video geregistreerd lesfragment. Natuurlijk zijn er bezwaren tegen een dergelijke registratie in te brengen. Een lesfragment kan immers slechts een deel van het repertoire van een leraar zichtbaar maken. Ik realiseer me ook dat het werken met transcripties van videofragmenten beperkingen heeft, omdat het beperkte weergaven van de werkelijkheid zijn. Zo krijgt de lezer onvoldoende inzicht in de geschiedenis van de klas en in de context van les. Ook leert hij de leraar noch de kinderen echt kennen. Naast de gesproken taal heb ik zoveel als mogelijk ook al het non-verbale handelen van de leraar beschreven, maar ik besef dat dit slechts een selectie is van wat ik op de videoband kan observeren en dat deze beschrijving beperkt wordt door de taal die ik gebruik om dit te beschrijven.

8 De enquête: Hoe ga je naar school?

De leraar van groep 7 begint de les met een inventarisatie van reacties op de vraag hoe de kinderen naar school komen. Vervolgens deelt ze een kopie uit van het volgende probleem (fig. 1).²

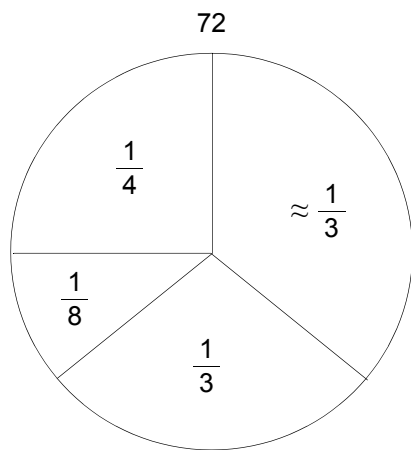
We hebben een enquête gehouden onder de kinderen van onze school. We wilden wel eens weten hoe de kinderen naar school gaan. Van de 180 kinderen die bij ons op school zitten, hebben er 72 meegedaan.

Van de 72 kinderen komen er 24 op de fiets naar school en 9 kinderen worden gebracht. 18 Kinderen komen met de bus. De anderen gaan lopend naar school.

uit: *De Achtkante Dobbelsteen*

figuur 1

Het probleem heeft betekenis voor de leerlingen, omdat de school waar de les plaatsvindt met het oog op de bouw van een nieuwe fietsenstalling werkelijk wil weten hoe de kinderen naar school komen. In de methode staat direct onder deze opgave een verhoudingstabel, maar omdat de leerlingen in vorige lessen niets van de tabel bleken te begrijpen, is de tabel weggelaten. Nadat de leraar het probleem heeft uitgedeeld stelt ze twee vragen: ‘Wat weet je nu? Wat kun je erover zeggen?’ De leerlingen werken zoals gebruikelijk in de klas in groepjes van vier aan dit probleem; ze nemen getallen over op hun kladbloodje en overleggen met elkaar. Opvallend is dat niemand in eerste instantie een verhoudingstabel maakt. Wel is er door verschillende groepjes een cirkeldiagram getekend. De leraar noteert de oplossing van het groepje van Helga op het bord: een cirkel met daarboven het getal 72. De cirkel wordt eerst in kwarten en dan in achtsten verdeeld. In de verdeling passen de 18 busgebruikers ($\frac{1}{4}$), en de 9 autokinderen ($\frac{1}{8}$) en de 24 fietsers ($\frac{1}{3}$). Met de resterende 21 kinderen, die lopend naar school komen, hebben de leerlingen moeite. Ze kunnen dit aantal niet in een breuk uitdrukken en houden het op ongeveer $\frac{1}{3}$ (fig.2).



figuur 2

Er ontstaat een discussie over het probleem dat slechts 72 leerlingen de enquête hebben ingevuld en dat er 180 kinderen op school zitten. Dan komen er diverse oplossingen uit de klas naar voren. Rosan zegt: ‘Je moet 180 streepjes zetten’. De leraar vraagt wie het slimmer kan doen. Machmud zegt: ‘De helft van 180 is 90, de helft van 90 is 45’. Rianne zegt: ‘ $\frac{1}{3}$ van 180 is 60’. En Seline: ‘ $\frac{1}{8}$ is 22’. De leraar vraagt: ‘Wat weten we nu?’ Ramin merkt op dat je 187 hebt als je alle getallen bij elkaar optelt. Hij bedoelt dat als je de verhouding bij de 72 kinderen toepast op de 180 leerlingen. $\frac{1}{3}$ van 180 voor de fietsers is 60, $\frac{1}{8}$ lopers is 60, $\frac{1}{4}$ buskinderen is 45, en $\frac{1}{8}$ autokinderen is 22 en $60 + 60 + 45 + 22 = 187$. Om het ‘overschot van 7’ weg te werken, stelt hij voor om van elk deel ‘1’ af te halen, dan heb je 182 en dat is dicht bij 180.

Het volgende videofragment gaat over een discussie. Aan de orde is de vraag of je van elk deel één mag afhalen. In

het transcript staat de afkorting ‘Lk’ voor de leraar, de namen van de leerlingen zijn geanonimiseerd.

Lesfragment

- Lk Jij zoekt nog steeds dat je het precies wilt, hartstikke goed! Goede manier om te doen (wijst naar de leerlingen). De vraag is: mag dat? Ik bedoel er overal maar eentje af. (Maakt gebaar van iets weghalen. Trekt dan haar schouders omhoog en doet een paar stappen achteruit. Armen gebogen omhoog, gebaar van twijfel uitdrukkelijk.) Is dat eerlijk? (Loopt naar bord en wijst in cirkeldiagram de kwart van de buskinderen aan.) Hier doen we er eentje af en daar (wijst $\frac{1}{8}$ deel aan) doen we er ook eentje af. (Van alle kanten roepen leerlingen: Nee, nee, nee, en praten door elkaar).
- Lk. (Kijkt een leerling aan, lacht en buigt naar haar toe.) Wacht even, zo kan ik het niet verstaan; ik wil even horen wat Helga zegt, want ze zegt: Ik heb een veel eerlijker manier.
- Helga Als je bij één er 1 af zou halen dan zou je hem bij die andere erbij moeten doen, dat is veel eerlijker dan bij iedereen er 1 afhalen.
- Asma Nee.
- Helga Wel eerlijker dan bij iedereen er een af te halen.
- Lk Dit komt me wel bekend voor (wijst naar Noal en lacht naar deze leerling en blijft wijzen tot de leerling gaat praten).
- Noal Maar dat is juist niet eerlijk. Als je van eentje er eentje afhaalt, moet je van allemaal er eentje afhalen. Maar als je er een bijdoet moet je bij iedereen eentje bij.
- Lk En als je nou ...
- Noal Anders is niet eerlijk, de eentje krijgt er eentje bij, de ander moet er eentje af.
- Lk En is dat dan wel eerlijk, Noal? Als je van de hele club van 60 (wijst dit deel op cirkeldiagram aan) er eentje afhaalt en van die 22 andere haal je ook een hele af? (maakt met hand beweging van iets weghalen en doet stap opzij).
- Noal Ja.
- Lk O, dat maakt niets uit? (Diverse leerlingen roepen: jawel. De leraar laat eerst een stilte vallen, doet een stap opzij en wijst leerling aan.) Nou waarom maakt dat uit? Daar heb ik een medestander, verdedig, waarom? Waarom (blijft naar de leerling wijzen). Waarom maakt het uit, dat vind ik ook, van 60 één eraf en van 22 één eraf, dat komt mij heel oneerlijk over. Ik vind dat dat niet kan. Katja probeer eens.
- Katja (...?) niet eerlijk ...
- Lk Kun je vertellen waarom? Ik ben het direct met je eens.
- Katja (Schudt met haar hoofd: nee). (Andere leerlingen roepen door de klas).
- Lk Let op (staat voor bij rechterbord voor de klas, houdt gebogen armen breed uitgespreid naar voren alsof ze iets bij elkaar houdt). We z’n met z’n zesti- gen (doet stap achteruit en trekt haar armen in), er gaat er een af (steekt één vinger omhoog van beide handen) Ja, mee eens? Oke (blijft even staan en loopt dan naar het linkerbord, steekt al lopend een vinger op en zegt): Let op! We zijn met z’n 22en

(maakt weer met gebogen armen gebaar alsof ze iets bij elkaar houdt maar nu iets dat kleiner is en omvat met dit gebaar als het ware een groepje van twee leerlingen die voor haar zitten). Er gaat er eentje af (trekt een leerling aan zijn arm van zijn stoel naar zich toe). Is dat nou eerlijk? (wijst heen en weer van de ene denkbeeldige grote groep naar de andere, kleine groep).

(De leerlingen roepen in koor: Nee, nee).

Lk (Buigt voorover naar de leerlingen): Waarom is dat nou niet eerlijk? Niek (leraar loopt in de richting van Niek en houdt haar vinger opgestoken. Wijst naar Niek).

Niek Eerlijk gezegd als je er bij 60 eentje afhaalt (... ?) uitkomt dan heb je (... ?)

Lk Ja, er moeten er een heleboel af. (Andere leerlingen roepen wat. Een meisje staat op en wil wat zeggen) Ramin? (Lk zegt andere leerling: even wachten).

Ramin Meestal als je ... bij 60 iets afhaalt maakt het meestal niet uit want er zijn er toch al heel veel. Maar als je van 22 afhaalt dan.

Lk (richt zich tot de hele groep). Hoor je wat Ramin zegt? (wijst naar hem) Klopt het wat Ramin zegt? (Blijft naar leerlingen kijken, laat stilte vallen). Klopt het wat Ramin zegt? (wijst hem aan).

De leerkracht herhaalt haar uitleg van het weghalen van één leerling uit de denkbeeldige grote groep en één leerling uit de kleine groep van 2 waarop de leerlingen meewarig 'aach' zeggen over het feit dat er in de kleine groep maar een enkele leerling over blijft. Als een leerling daarna tot de conclusie komt dat je er bij 60 meer mag weghalen dan bij 22, zet de leraar het gesprek voort met de vraag hoeveel je er daar dan weg mag halen.

9 Analyse

Ik analyseer het fragment vooral vanuit het perspectief van wat de leraar zegt en doet. Een dergelijke analyse geeft geen zicht op het denken van de leraar dat aan dat handelen ten grondslag ligt. Toch zal ik proberen uit wat de leraar zegt en doet af te leiden wat dit veronderstelt aan kennis en vaardigheden. Overigens is in deze les alleen de klassikale interactie geanalyseerd en we kunnen niets zeggen over de rol van de leraar bij de groepsgesprekken tussen de leerlingen.

Wat observeren we in dit fragment? En hoe zouden we dit kunnen interpreteren? De leraar legt de leerlingen een wiskundig probleem voor, dat zo is aangepast dat het een echte vraag van de school betreft. Dit geeft het probleem betekenis voor de leerlingen. De leraar stelt hierbij de vragen 'Wat weet je nu?' en 'Wat kun je erover zeggen?' In de les staat het onderwerp 'verhoudingen' (als *big idea*) centraal. De leraar biedt geen verhoudingstabel aan als pasklaar model om mee te gaan rekenen, omdat ze heeft geobserveerd dat de verhoudingstabel werd gebruikt als 'model voor' terwijl het nog niet als 'model

van' door de leerlingen was ontwikkeld (Gravemeijer, 1999). Het probleem biedt zo ruimte aan de leerlingen om de gegevens op hun eigen wijze te representeren met een scala aan oplossingsmanieren. Uit het herontwerp van het probleem kunnen we afleiden dat de leraar dit probleem vakinhoudelijk goed in de vingers heeft en vakdidactisch heeft doordacht hoe ze wiskundig denken over verhoudingen bij haar leerlingen wil bevorderen. Hierbij is de kwaliteit van het probleem essentieel. Deze observaties laten iets zien van de eigen gecijferdheid van de leraar, maar ook van haar specifieke professionele gecijferdheid.

Bij het oplossen van het probleem gebruiken diverse kinderen een cirkeldiagram en breuken om de gegevens te representeren. De leraar noteert dit op het bord. Voor de diverse groepen, zoals fietsers en busgebruikers, kan de verdeling met een eenvoudige breuk worden aangegeven, maar dit is lastig bij de groep van 21 lopers van 180 kinderen. De leerlingen besluiten om 21 op ongeveer een derde af te ronden. De leraar laat dit zo. Uit een van de groepjes komt nu naar voren dat je niet kunt weten wat die 72 leerlingen hebben ingevuld, ook geldt voor alle 180 leerlingen van de school. Diverse leerlingen komen met oplossingen waar de leraar niet op ingaat; ze vraagt dan om een slimmere oplossing. Pas als Rianne dezelfde verhouding die bij 72 leerlingen gold gaat toepassen op 180 leerlingen, vraagt de leraar: wat weten we nu? Ramin merkt dan op dat als je de aantallen van de groepen nu volgens deze verhouding berekent en optelt, je een totaal van 187 leerlingen krijgt. Hij stelt voor om bij elke groep er een weg te halen zodat er 182 overblijven dat al dichter bij 180 ligt dan 187.

De leraar weet de opmerking van Ramin direct te plaatsen en doorziet dat het wezenlijk is hierop in te gaan. Ze brengt nu een discussie op gang over de vraag of je er bij elke groep zomaar een mag weghalen. Dit is een zeer relevante wiskundige vraag, die de kern van 'verhoudingen' raakt. Ze verheldert de vraag of het eerlijk is om er overal een weg te halen. Ze probeert de leerlingen uit te dagen tot discussie door te wijzen op het grote segment van een $\frac{1}{4}$ en het kleine segment van $\frac{1}{8}$ in het cirkeldiagram op het bord, en door gebaren te maken met haar armen om een grote groep en een kleine groep leerlingen en het weghalen van een leerling te verbeelden. Ze is in staat steeds in te haken op wat leerlingen zeggen, waardoor er sprake is van echte dialoog. Uit deze observaties valt af te leiden dat de leraar tevoren heeft geanticipeerd op wat leerlingen zouden kunnen gaan doen. Ze kan zo interpreteren wat leerlingen zeggen. Ze heeft met andere woorden kennis over het wiskundig denken van de leerlingen.

De leraar laat diverse kinderen aan het woord, maar negeert bepaalde zaken die in de discussie naar voren komen, maar niet relevant zijn voor het gesprek over verhoudingen. Ze maakt keuzen welke voorbeelden gebruikt kunnen worden om het leerproces te verdiepen. Ze daagt

kinderen uit om haar te overtuigen. Ze houdt daarbij het doel van de les steeds voor ogen, maakt keuzen waar ze wel en waar ze niet op ingaat. Deze observaties laten zien hoe breed haar vakdidactische kennis is.

De leraar zorgt ervoor dat de discussie aan de gang blijft door allerlei soorten vragen te stellen. Ze stelt open vragen en vraagt ook regelmatig door als het antwoord van een leerling niet helder is of haar niet overtuigt. Ze zegt bijvoorbeeld: Maakt dat niets uit? Waarom maakt dat niets uit? Ook stelt ze vragen die leerlingen stimuleren tot redeneren en reflectie: Is dat nou eerlijk? Kun je vertellen waarom? Klopt het wat Ramin zegt?

De vraag is: mag dat? De leraar maakt tevens vaak gebruik van non-verbale handelingen om kinderen bij de discussie te betrekken: aanwijzen wie de beurt heeft, leerlingen die de beurt hebben aankijken, rondkijken om iedereen bij het gesprek te betrekken, de naam van een leerling noemen die een beurt krijgt, naar een leerling toelopen, door de klas lopen en een vinger opsteken als aandachtsgebaar.

Gebaren stimuleren en ondersteunen zo de interactie klassen. Bovendien probeert de leraar door non-verbaal handelen het denken van de leerlingen te ondersteunen of door haar gezichtsuitdrukking of handgebaren reflectie uit te lokken. De leraar is in staat zowel horizontale, verticale als simultane interactie op gang te brengen. Uit de vele soorten vragen die ze de leerlingen stelt, en de manier waarop ze ingaat op wat kinderen zeggen, uit haar vaak prikkelend non-verbaal handelen, het soms uitblijven van een reactie en het soms geven van positieve feedback, blijkt dat ze over een breed repertoire aan interactieve vaardigheden beschikt. Bij dit alles blijft ze steeds gericht op de wiskundige kern; dat is in dit voorbeeld 'verhoudingen'.

Wat kunnen we zeggen over de normen in de klas? De observaties laten zien dat de leraar steeds probeert het probleem bij de leerlingen te leggen. De leerlingen gaan zelf op zoek naar oplossingen, proberen deze te verwoorden en verantwoorden, luisteren naar elkaar, en reageren op elkaar als ze het niet met elkaar eens zijn. De observaties laten ook zien dat de sociale normen in deze klas interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs mogelijk maken. De leraar stelt bovendien eisen aan de oplossingen die kinderen naar voren brengen. Als een leerling zegt dat je honderdtachtig streepjes moet zetten, vraagt de leraar wie het slimmer kan doen. Hiermee keurt ze deze oplossing niet af, maar laat merken dat er ook andere, kwalitatief betere oplossingen zijn.

Hieruit is af te leiden dat de leraar wiskundige normen (*socio mathematical norms*) verbindt aan de oplossingen en de uitleg van leerlingen. De leerlingen reageren actief op deze expressieve leraar, die mede door haar non-verbaal handelen en door haar aandachtsvol luisteren naar wat leerlingen zeggen contact met haar leerlingen maakt en tegelijkertijd leiding geeft aan de interactie. De leer-

lingen lijken zich op hun gemak te voelen om mee te praten en de participatie van leerlingen is groot; veel leerlingen praten mee of kijken naar wie aan het woord is. Dit zegt iets over het pedagogisch klimaat in de klas.

Kortom, de leraar vraagt aandacht van haar leerlingen door haar prikkelende vragen en haar non-verbaal handelen. Ze geeft aandacht door werkelijk naar de leerlingen te luisteren, door hun woorden zo goed mogelijk te interpreteren en daarop te reageren. In de kern wordt duidelijk dat de geobserveerde leraar bij alles wat ze doet steeds de denk- en leerprocessen van de leerlingen in het oog houdt. Samengevat kunnen we zeggen dat deze leraar over een zeer breed repertoire beschikt en dat ze kan lezen en schrijven met haar klas.

10 Slotbeschouwing

We vertrokken in dit artikel vanuit de vraag over welk vakinhoudelijk en vakdidactisch repertoire leraren zouden moeten beschikken om interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven. Uit de analyse van een voorbeeld uit de klassenpraktijk van een deskundige leraar bleek dat veel van het door anderen beschreven repertoire in het handelen van deze leraar zichtbaar werd of dat op basis van haar handelen verondersteld kan worden dat ze over dit repertoire beschikt. Dit geldt ook voor de door mij genoemde aanvullende elementen over interactie en klassennormen. Deze aanvullende elementen moeten daarom naar mijn idee dan ook geëxpliciteerd worden en deel gaan uitmaken van dit repertoire. Een logische vervolgvraag is nu: Hoe kan dit repertoire ontwikkeld worden? Natuurlijk verschilt dit voor de opleiding en voor de professionalisering van leraren. Ik noem enkele punten.

Bij de ontwikkeling van het repertoire zouden denk- en leerprocessen van leraren en later ook van leerlingen mijns inziens veel aandacht moeten krijgen. De bewustwording en ontwikkeling van eigen wiskundige kennis en eigen aanpakken kan bevorderd worden door te reflecteren op eigen oplossingswijzen, liefst ook in samenspraak met anderen. In het verlengde van eigen denkprocessen zou de aandacht gericht kunnen worden op de denk- en leerprocessen van leerlingen. Het observeren en analyseren van videolessen, het analyseren van schriftelijk werk van leerlingen, het praten met individuele kinderen (ook de zwakke rekenaars) bieden mijns inziens de sleutel om (aanstaande) leraren een *actor's point of view* te leren innemen. Het interactief werken zou gestart kunnen worden met individuele leerlingen, daarna met groepjes leerlingen en tenslotte pas met klassikale interactieve gesprekken. Het werken met individuele kinderen biedt ruimte voor 'improvisatie', zoals Freudenthal

(1991) dit zo toepasselijk noemde. Maar, zoals iedere muzikant weet, vereist improviseren een repertoire aan kennis en vaardigheden. De eigen professionele gecijferdheid zou daarom voortdurend verder ontwikkeld moeten worden.

Intervisie en begeleiding, aan de hand van (liefst op video geregistreerde) observaties van eigen lessen, zijn essentieel voor de ontwikkeling van een breed vakdidactisch repertoire. Bij dit alles zijn goede praktijkvoorbeelden een bron om van te leren met een grote variatie aan videomateriaal, transcripten van lesfragmenten, leerlingewerk, voorbeelden en analyses van rijke problemen, voorbeelden van herontwerpen van bestaande problemen tot rijke problemen en voorbeelden van hypothetische leertrajecten bij lessen.

In de opleiding en professionalisering van leraren zou ook meer aandacht besteed kunnen worden aan het gebruik van een begrippenkader om over interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs te praten. Te denken valt hierbij bijvoorbeeld aan begrippen voor het benoemen van diverse typen vragen die leraren kunnen stellen, van technieken om te reageren op wat leerlingen zeggen, van soorten hulp, en voor het aanduiden van begrippen rond sociale en wiskundige normen.

Een apart punt van aandacht betreft de rol van de methode. Reken-wiskundemethoden spelen een belangrijke rol in de dagelijkse lespraktijk, maar om allerlei redenen zijn methoden soms doorgeschooten in hun pogingen om leraren te ondersteunen bij hun lesgeven, met als gevolg dat de wiskundige problemen doorgaans te weinig uitdagend zijn, het leerproces in te kleine stapjes is uiteengelegd en er onvoldoende ruimte gegeven wordt voor het probleemoplossend denken van de leerlingen. Het (her)ontwerpen van problemen zou daarom deel uit moeten maken van opleiding en professionalisering. De methode biedt houvast, maar geen zicht op de leerprocessen die men beoogt te ontwikkelen. Leraren en pabo-studenten zouden geholpen moeten worden om meer zicht te krijgen op leerlijnen in de methode en het globale verloop van leerprocessen. De TAL-boeken kunnen hierin een belangrijke rol spelen. Daarnaast zijn activiteiten nodig om op gedetailleerder niveau naar methoden te kijken, om te begrijpen welke onderwijsleerprocessen beoogd worden met bepaalde opgaven, problemen en vragen in methodische lessen. Leraren zouden een hypothetische leertraject kunnen ontwikkelen bij een of meer activiteiten of een les uit de methode en deze les ook daadwerkelijk uitvoeren. Op grond van een analyse van de les, liefst aan de hand van een video-registratie, zou daarna het hypothetische leertraject kunnen worden bijgesteld.

Laten we ons realiseren dat interactief, probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs geven zeer gecompliceerd en razend moeilijk is en dat dit een breed vakmatig

repertoire van leraren vereist. Het is daarom nodig dat we het in grote lijnen eens worden over de essenties in het vereiste repertoire en mogelijke leertrajecten ontwerpen om dit repertoire te ontwikkelen. Om meer zicht te krijgen op dit vakmatige repertoire van leraren en de mogelijkheden om dit te ontwikkelen, is meer systematisch onderzoek nodig. Naast het verzamelen van gegevens met diverse observatie- en interviewtechnieken, zouden ook methodisch materiaal, (her)ontwerpen daarvan en leerlingewerk verzameld en geanalyseerd moeten worden. Dergelijk onderzoek naar het repertoire van leraren in multiculturele klassen is op kleine schaal verricht in de vorm van ontwikkelingsonderzoek en van case studies. Het blijkt vruchtbare gegevens op te leveren (Den Brok, Van Eerde & Hajer, 2007; Van Eerde & Hajer, 2009).

De verschillen in opvatting over de mate van sturing in 'realistische kring' worden mijns inziens soms te stellig en te algemeen gesteld. Hangt de mate van *guidance* die gewenst is niet van het type les en het lesdoel af? En moeten we niet een zekere liberale opstelling hebben ten opzichte van individuele verschillen tussen leraren? Er is niet één goede manier. Elke leraar heeft een andere stijl, eigen voorkeuren en sterke punten. Van belang is dat meer leerzame interactie plaatsvindt en dat leraar een leerlingen plezier hebben in rekenen-wiskunde. Interactie? Ja, maar liever een kort, leerzaam dan een lang, doelloos gesprek. Laat de aard en intensiteit van de interactie vooral afhankelijk zijn van het wiskundige onderwerp en het doel van de les, van voorgaande leerprocessen en van verschillen tussen leerlingen, zowel in cognitief als emotioneel en sociaal opzicht.

Er is al lange tijd in Nederland onvoldoende aandacht geweest voor professionalisering van leraren. Laten we hopen dat de investeringen die de komende jaren in ons onderwijs worden gedaan vooral ten goede komen aan onze huidige en toekomstige leraren. Ik houd een pleidooi voor tijd en ruimte voor (aanstaande) leraren om zich verder te professionaliseren en om daarmee de kwaliteit van ons reken-wiskundeonderwijs te verbeteren.

Noten

- 1 Met dank aan R. de Jong en M. van Zanten voor hun commentaar op een eerdere versie van dit artikel.
- 2 Het herontwerp en de uitvoering van deze les vond plaats in het kader van het TAL-project *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen*, Freudenthal Instituut SME. Zie ook het artikel van Frans van Galen en Lia Oosterwaal (2007), Rekenproblemen open aanbieden. *Volgens Bartjens...*, 27(2), 30-34.

Literatuur

Brok, P. den, D. van Eerde & M. Hajer (2007). Case studies als bron voor docent-competenties in multi-etnische klassen. In: Bosker, R., S. Doolaard & A. Jacobse (eds.). *Proceedings van de 34e Onderwijs Research Dagen*, 6-8 juni 2007. Gro-

- ningen: GION, 183-184.
- Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.
- Cobb, P. & E. Yackel (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31, 175-190.
- Driel, J.H. van (2008). *Van een lerende vakdocent leer je het meest*. Leiden: ICLON (oratie).
- Eerde, H.A.A. van & M. Hajer (2009). The integration of mathematics and language learning in multi-ethnic schools. In: M. César & K. Kompulainen (eds.). *Social Interactions in Multicultural Settings*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Eerde, H.A.A. van (1996). *Kwantiwijzer. Diagnostiek in reken-wiskundeonderwijs*. Tilburg: Zwijsen.
- Eerde, H.A.A. van, W. van den Berg & S. Lit (1992). *Kwantiwijzer Voor Leraren. Handleiding*. Tilburg: Zwijsen.
- Elbers, E. (1993). *Leren door interactie*. Groningen: Wolters Noordhoff (oratie).
- Fosnot, C. & M. Dolk (2003). Het Leerlandschap. *Tijdschrift voor nascholingen onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 21(2), 29-37.
- Freudenthal, F. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, F. (1991) *Revisiting mathematics. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer.
- Galen, F. van & L. Oosterwaal (2007/2008). Rekenproblemen open aanbieden. *Volgens Bartjens...*, 27(2)30-34.
- Gool, A.B. van & J.B. den Hertog, (2008). De toekomst van het onderwijs in rekenen en wiskunde op de basisschool. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 27(2), 17-23.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β Press.
- Gravemeijer, K. (1995). Het belang van social norms en social math norms voor realistisch reken-wiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 14(2), 17-32.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177.
- Gravemeijer, K. (2001). *Reken-wiskundeonderwijs voor de 21ste eeuw*. Utrecht: Faculteit Sociale Wetenschappen & Faculteit Wiskunde en Informatica, Universiteit Utrecht (oratie).
- Gravemeijer, K. (2004). Learning Trajectories and Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128.
- Gravemeijer, K. (2007). Reken-wiskundeonderwijs anno 2007. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(4), 3-10.
- Gravemeijer, K. & J. Terwel (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777-796.
- Hill, H. C., B. Rowan & D. L. Ball (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Mercer, N. (1999). *Samen leren. De praktijk van interactief onderwijs*. Utrecht: Sardes.
- Mercer, N. & K. Littleton (2008). *Dialogue and the Development of Children's Thinking. A sociocultural approach*. London/New York: Routledge.
- Nelissen, J.M.C. (2002). Interactie: een vakpsychologische analyse (1). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 20(4), 3-14.
- Nelissen J. & B. van Oers (2000). Reken maar. Reflecties op de praktijk. *JSW boek*. Baarn: Bekadidact.
- Oonk, W., M. van Zanten & R. Keijzer (2007). Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikkeling. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(3), 3-18.
- Parreren, C.F. van (1988). *Ontwikkelen Onderwijs*. Leuven: Acco.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Streefland, L. (1990). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer.
- Thames, M.H., L. Sleep, H. Bass & D.L. Ball (2008). Mathematical knowledge for Teaching (K-8): Empirical, Theoretical, and Practical Foundations. *Paper presented at ICME 11, TSG 27, Monterrey, Mexico July 6-13, 2008*.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.
- Zanten, M. van & A. van Gool (red.) (2007). *Opleiden in geuren en kleuren. Bakens voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo*. Utrecht/Enschede: FIsme/SLO.

Mathematics education is being discussed. The development of a clear point of view and a certain consensus on aims, content and pedagogy can boost our position, both internally a communicating with the world outside our field. There are initiatives from various sides to stimulate a fruitful discussion on several aspects of mathematics education and primary teacher education that can help to establish a new point of view.

In this article the central question is which mathematical repertoire teachers should acquire for interactive, problem-oriented mathematics teaching.