

Wachtrijen; statistiek voor de onderbouw havo/vwo en vmbo

Bert Zwaneveld ¹

Inleiding

We spreken in het onderwijs over ‘statistiek’, maar misschien is ‘statistisch modelleren’ een betere benaming. Bij modelleren in het algemeen gaat het erom een probleemsituatie uit de werkelijkheid, de ‘niet-wiskundige wereld’, te vertalen naar de ‘wiskundige wereld’. Die vertaling heet een wiskundig model, meestal kortweg model genoemd. Met dat model kan een probleem uit die niet-wiskundige wereld worden opgelost. Zo’n model kan meetkundig, grafische, algebraïsch, analytisch, statistisch, kanstheoretisch zijn of een combinatie van deze. Het onderwerp ‘statistisch modelleren’ is belangrijk voor de toekomst. De redenen zijn: het toenemend belang van modelleren in het algemeen, de beschikbaarheid en het veelvuldige gebruik van ready-made statistische hulpmiddelen, simulaties, en het feit dat in de informatiemaatschappij veel informatie statistisch van aard is. Bij een statistisch model van een situatie in de werkelijkheid speelt het variëren van een of meer van de grootheden die bepalend zijn voor de situatie een belangrijke rol.

In deze bijdrage wordt in een ontwerp voor een tweetal lessen een voorbeeld van dit statistisch modelleren beschreven. Het is bedoeld voor leerlingen van rond de 15 jaar. Zij maken kennis met het modelleren van een proces waarbij variatie in twee grootheden optreedt en met de manier waarop de wiskunde dat variëren beschrijft. Concreet: het proces is dat van een wachtrij voor een loket of in een winkel met één persoon die de klanten bedient. De twee variërende grootheden zijn het moment waarop een klant zich meldt – preciezer: de tijdsduur die verstrijkt tussen de aankomst van twee opeenvolgende klanten - en de tijdsduur van het bedienen van een klant. Uiteraard varieert ten gevolge van deze twee grootheden ook een derde grootheid, namelijk de wachttijd van een klant. Een andere en vergelijkbare probleemsituatie is die van een file op een tweebaansweg weg. Het wiskundige begrip dat greep geeft op het variatiekarakter is het begrip ‘verdeling’ van een variërende grootheid. In deze bijdrage komen de verdeling van de tijdsduur die verstrijkt tussen de aankomst van twee opeenvolgende klanten en de tijdsduur van de behandeling van een klant tot stand voor middel van simulatie.

Het wiskundige ‘procesdoel’ van deze twee lessen is het doorgronden en wiskundig beschrijven van wat er bij het ontstaan van een wachtrij gebeurt. Wiskundig ligt de nadruk op het begrip verdeling, en dan met name van de tijdsduur tussen twee opeenvolgende aankomsten en van de tijdsduur van de behandeling van een klant. Deze twee grootheden bepalen de grootte die een klant betreft: diens wachttijd.

Beperkingen

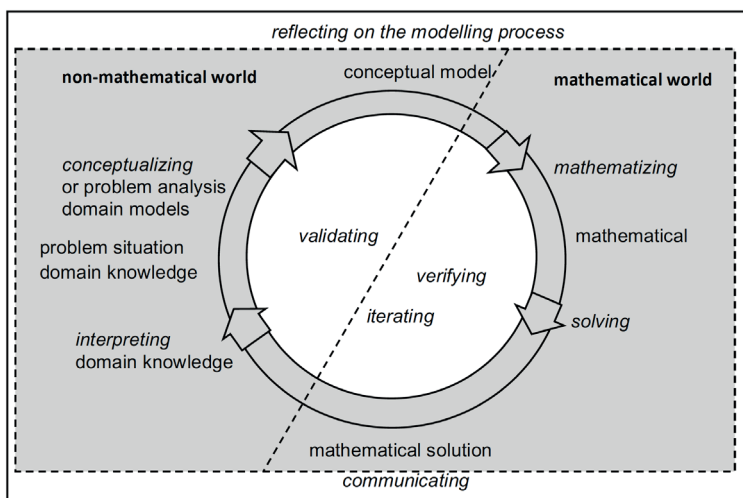
We beschrijven een mogelijke verloop van het onderwijsleerproces. Dat betekent dat het geen leerlingentekst is. De leraar of leraar die het de klas uitvoert moet het onderwijsleerproces zelf nader uitwerken. Daarbij kunnen eigen voorkeuren tot eigen, of andere keuzen leiden. Ook is het niet zo dat alles wat beschreven wordt, in de klas gedaan moet worden. Het mogelijke verloop is dus in feite niet meer, maar ook niet minder, dan een door ons doordachte lessensuggestie.

Het gaat in deze lessen over statistisch modelleren en over het begrip verdeling. Wij gebruiken in deze bijdrage de term verdeling voor de frequenties van de verschillende mogelijke uitkomsten van een proces waarin variatie optreedt. We hebben ervoor gekozen het begrip kans, dat ook een wiskundig modelbegrip is, niet te gebruiken, omdat dit naar ons idee voor deze leerlingen net iets teveel van het wiskundig goede voor dit stukje wiskundeonderwijs zou zijn.

Achtergrond

Veel onderzoekers van het onderwijs in wiskundig modelleren hebben het modelleerproces beschreven door middel van de modelleercyclus waarin altijd de elementen probleemsituatie in de werkelijkheid, wiskundige beschrijving en oplossing, en interpretatie van de wiskundige oplossing in de werkelijkheid voorkomen. Perrenet en Zwaneveld (2012) hebben op basis van de in de literatuur voorkomende modelleercycli en op basis van onderzoek onder studenten van de Bacheloropleiding Toegepaste Wiskunde van de Technische Universiteit Eindhoven de activiteiten die leerlingen/studenten uitvoeren bij wiskundig modelleren in kaart gebracht. In figuur 1 is dat schematisch weergegeven. We lichten een paar van de daar genoemde activiteiten toe: conceptualiseren, mathematiseren, communiceren, itereren, verifiëren en valideren. Met conceptualiseren bedoelen we het doorgronden van de probleemsituatie, het onderkennen van de hoofdzaken: de aspecten of grootheden/variabelen, die een rol spelen en eventueel hoe die samenhangen. Ook van belang is het expliciteren van de aannames die gemaakt worden, zeker bij statistisch modelleren. Mathematiseren is vervolgens het conceptuele model in wiskundige termen, bijvoorbeeld vergelijkingen,

maar het kan bijvoorbeeld ook grafisch, te expliciteren. Met communiceren bedoelen we het maken van een verslag waaruit blijkt dat het model voldoet aan de eisen die de eventueel virtuele opdrachtgever heeft gesteld. In het voortgezet onderwijs is dit minder belangrijk dan in het hoger onderwijs. Itereren is het nogmaals doorlopen van de modelleercyclus, bijvoorbeeld omdat het resultaat niet bevredigend (genoeg) is of om zaken die aanvankelijk om wat voor reden dan ook niet zijn meegenomen, alsnog mee te nemen. Verifiëren betekent dat nagegaan wordt of het wiskundig oplossen correct verlopen is. Valideren betekent dat de modelleerder probeert via andere wegen of bronnen na te gaan of het model (voldoende) geldig (valide) is. We nemen aan dat de overige activiteiten voldoende duidelijk zijn.



Figuur 1. Modelleercyclus volgens Perrenet en Zwaneveld (2012)

Opzet

Het beoogde onderwijsleerproces is gericht op (1) het minstens conceptueel, maar liefst wiskundig beschrijven van wat er gebeurt bij een wachtrij met één persoon die de klanten afhandelt, en (2) op het greep krijgen op het optreden van de variatie in de tijdsduur tussen twee opeenvolgende aankomsten door middel van het wiskundige begrip verdeling. Dit betekent dat veel energie in het conceptualiseren van wat er gebeurt bij het ontstaan van een wachtrij gestoken wordt, en dat daarbij variatie nadrukkelijk aan de orde komt om alvast te oriënteren op het begrip verdeling.

De globale opzet is dat er één les besteed wordt aan het conceptualiseren van wat er gebeurt bij het ontstaan van een wachtrij, en één les aan het greep krijgen op variatie door middel van het begrip verdeling. De globale startvraag waarmee de leerlingen de twee lessen beginnen is de volgende.

De data

De in het vervolg voorkomende data zijn geen waargenomen data, maar in Excel gesimuleerde data. Ze staan op www.rekenenwiskunde21.nl vanwaar ze zijn te downloaden. Ze staan daar in drie vormen:

- als tabellen en grafieken in Word
- als tabellen en grafieken met dezelfde getallen in Excel
- als voorgeprogrammeerde rekenbladen in Excel waarmee de leerlingen zelf kunnen experimenteren.

Tevens staat daar uitleg over de voorgeprogrammeerde rekenbladen opgenomen.

De tabellen en grafieken in Word of eventueel Excel kunnen als werkbladen aan de leerlingen beschikbaar worden gesteld. Ze kunnen van dienst zijn bij klassikale besprekingen.

Wat ook van belang is om vooraf te weten is dat alle data in gehele minuten zijn. We hebben dit vooral gedaan om de verwarring te vermijden die 2,50 (2 minuut 30 seconde en 2 minuut 50 seconde) kan oproepen.

Les 1. Het conceptualiseren en mathematiseren van een wachtrij met behulp van een tabel

De les begint met de volgende startvraag.

Stel je een winkel voor met één persoon die de binnenkomende klanten behandelt. Het is niet erg als mensen even moeten wachten, maar klanten accepteren het waarschijnlijk niet als ze 20 of 30 minuten moeten wachten, om dan zelf in 3 minuten geholpen te worden. Op een gegeven moment zal de winkel er echt een tweede verkoper naast moeten zetten. Om te weten wat wel en niet acceptabel is moet je de wachttijden onderzoeken. Wat bepaalt die wachttijd, en hoe kun je bepalen dat die wachttijd soms zo lang wordt dat een tweede verkoper in de zaak nodig is?

In deze fase bespreken de leerlingen, bijvoorbeeld in groepjes, het verloop van een wachtrij onderling. Het volgende kan aan de orde komen. Stel dat klanten precies om de 2 minuten komen en in 2 minuten geholpen worden, dan is er geen probleem. Als de tussentijd korter wordt en de verkooptijd gelijk blijft loopt het fout. Andersom ook, als de verkooptijd langer wordt dan 2 minuten. Maar klanten komen natuurlijk niet precies om de zoveel minuten en de verkooptijd is natuurlijk niet altijd hetzelfde. Soms zal de winkel leeg zijn, soms staan er mensen op elkaar te wachten.

De conclusie is dat het echte probleem in feite zit in de variatie van tussentijd en verkooptijd. Die zorgen er voor dat klanten soms moeten wachten, en misschien soms heel erg lang.

In het klassengesprek na het werken in groepjes kunnen de volgende variabelen aan de orde komen als:

- aankomsttijdstippen van klanten en de tijd tussen twee aankomsten (tussentijd),
- de verkooptijd,
- de wachttijden van de klanten.

Vervolgens kan worden gemeld dat iemand deze gegevens verzameld heeft. Zie tabel 1. De eerste klant komt twee minuten na opening binnen.

<i>klantnummer</i>	<i>aankomsttijdstip</i>	<i>verkooptijd</i>	<i>wachttijd</i>
1	2	4	0
2	25	5	0
3	29	1	1
4	32	3	0
5	42	2	0
6	45	5	0
7	53	6	0
8	55	3	4
9	64	3	0
10	66	3	1
11	74	6	0
12	78	3	2
13	80	2	3
14	87	1	0
15	97	4	0
16	100	2	1
17	105	2	0
18	108	4	0
19	114	3	0
20	118	6	0
21	121	4	3
22	123	4	5
23	125	5	7
24	130	1	7
25	134	2	4
26	138	4	2
27	146	2	0

Tabel 1. Het verloop van een wachtrij; de tijdstippen en tijdsduren zijn in gehele minuten

Deze tabel roept de volgende vragen op.

- Dit is een sterk vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. Dat is niet erg, want je moet de situatie eerst versimpelen om het probleem te kunnen bestuderen. Welke aannames zijn er allemaal gemaakt?
- Hoe kan het dat de wachttijd soms 7 minuten is, terwijl de verkooptijd maximaal 6 minuten is?
- Waardoor ontstaat die wachttijd eigenlijk?

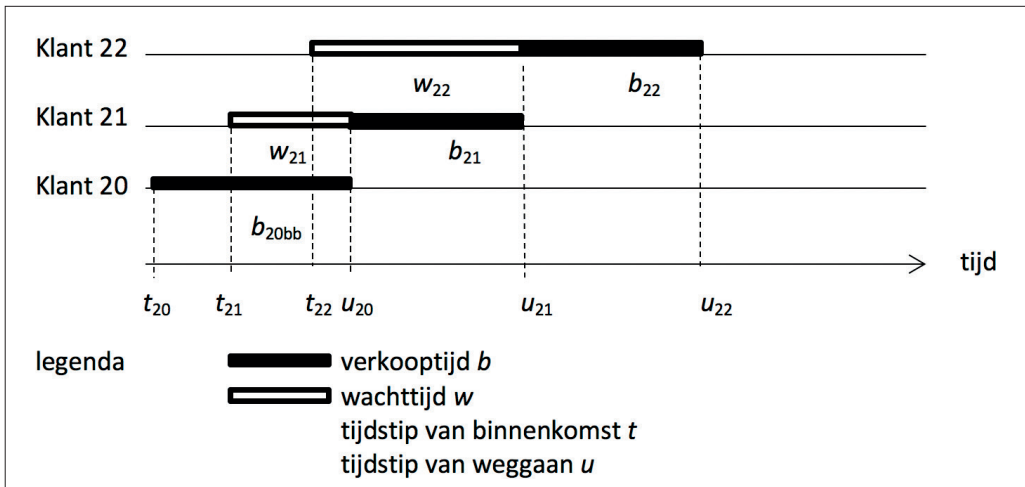
Een van de veronderstellingen is dat op het moment dat een klant klaar is, een aanwezige volgende klant meteen wordt geholpen. Een andere is dat een binnenkomende klant, terwijl er verder niemand aanwezig is, onmiddellijk geholpen wordt. En ook dat klanten nooit tegelijk binnenkomen. Wat ter voorbereiding op de tweede les zeker van belang is, is dat de leerlingen doorhebben dat de tijdsduur tussen twee opeenvolgende binnenkomsten varieert. Dat zelfde geldt voor de duur van een behandeling van een klant. Het zou heel mooi zijn als de leerlingen zouden zien dat de tijdsduren tussen twee opeenvolgende aankomsten weliswaar variëren, maar dat er toch gemiddeld ongeveer elke vijf en halve minuut een klant aankomt. Als dat niet gebeurt, geen probleem. Dan komt dat in de tweede les wel aan de orde.

De vraag naar de oorzaak van de wachttijden is de kernvraag. Nadenken daarover kan een aanleiding zijn om over de aannames na te denken, bijvoorbeeld: 'gek eigenlijk, er komen nooit twee mensen tegelijk binnen'.

Om de situatie voor de leerlingen te vereenvoudigen kan in de deze les gewerkt worden waarbij met vaste verkooptijden van 3 minuten wordt gewerkt. Alle bijbehorende tabellen en grafieken staan op www.rekenenwiskunde21.nl.

De les kan worden afgesloten met de opdracht om het verloop van de wachtrij van de tabel 1 grafisch in beeld te brengen. Grafiek 1 is een mogelijke grafische weergave voor de klanten met de klantnummers 20, 21 en 22. In zekere zin is deze grafiek het grafische model van de wachtrij. In grafiek 1 moet klant 21 eerst in zijn eentje wachten, daarna krijgt deze klant gezelschap van klant 22. En die moet dan weer een tijdje alleen wachten.

De kern van de nabespreking moet zijn dat het draait om de momenten dat iemand staat te wachten en er een derde klant binnenkomt, zoals klant 22 in grafiek 1: diens wachttijd is een deel van de wachttijd van klant 21, plus de hele verkooptijd van die klant. Is er gedurende het afhandelen van een klant slechts één wachtende dan is er niet echt veel aan de hand: die wachtende klant wordt meteen behandeld, zodra de zojuist afgehandelde klant klaar is, zie klant 21 in grafiek 1: diens wachttijd loopt alleen gedurende de verkooptijd van klant 20. Is de winkel leeg dan is de file opgelost en de situatie



Grafiek 1. Grafische weergave van het verloop van een wachtrij. Toelichting:
 $t_{20} = 118$: tijdstip van aankomst van klant 20;
 $u_{20} = 124$: tijdstip waarop klant 20 klaar is;
 $b_{20} = u_{20} - t_{20} = 6$, tijdsduur behandeling klant 20;
 $w_{20} = 0$ (er werd geen klant behandeld op het moment dat klant 20 binnenkomt);
 $w_{21} = 3$, wachttijd klant 21, enzovoorts.

als het ware weer gelijk aan het begin: de volgende binnenkomende klant wordt meteen geholpen.

Samenvatting les 1

De cursieve werkwoorden geven de activiteiten van de leerlingen waarop de leraar of lerares didactisch kan sturen

- *Oriënteren* op het verloop van een wachtrij
- *Reflecteren* op dat verloop en expliciteren van de basisaanname: (1) klanten komen op toevallige tijdstippen één voor één aan, nooit twee tegelijk; (2) als er geen klanten zijn wordt de aankomende klant meteen geholpen, anders sluit deze achteraan bij de wachtrij – ook als er een klant wordt geholpen en er verder geen wachtenden zijn; (3) de tijdsduur tussen twee opeenvolgende binnenkomsten varieert; (4) de tijdsduur van het afhandelen van een klant varieert; (5) als een klant klaar is gaat deze meteen weg en een eventueel wachtende klant wordt meteen geholpen.
- *Consolideren* en *verwerken* gebeurt door het lezen en interpreteren van grafiek 1, of eventueel door zelf zo'n grafiek te maken.

Anderen didactische fasen als integreren, terugblikken en afsluitende toetsing zijn niet of nauwelijks aan de orde. De les staat bijna geheel in het teken van het *conceptualiseren* van wat bij het verloop van een wachtrij gebeurt. Het maken van grafiek 1 is een vorm van *mathematiseren*, het lezen en begrijpen ervan is een vorm van *interpreteren*.. De modelleeractiviteiten oplossen, itereren, verifiëren, valideren, reflecteren en communiceren zijn niet aan de orde.

Les 2. Het conceptualiseren en mathematiseren van de aankomsttijdsduren bij een wachtrij tot het begrip verdeling van die aankomsttijdsduren

In de tweede les wordt de aandacht gericht op de variatie in de tijdsduur tussen twee opeenvolgende aankomsten en op de variatie in de tijdsduur van de afhandeling van een klant. Het oriënteren hierop vindt plaats door middel van tabel 1. De variatie in de verkooptijd is te zien in grafiek 2 met de frequenties van de verschillende verkooptijden. Ook de variatie in de wachttijden is zichtbaar gemaakt, en wel in grafiek 4 met de frequenties van de verschillende wachttijden. Hoe kunnen we nu de variatie in de tijden tussen de twee opeenvolgende aankomsten zichtbaar maken, waar we in tabel 1 alleen over de aankomsttijdstippen beschikken?

Laat de leerlingen even bekijken hoe de grafieken 2 en 4 uit tabel 1 volgen. Laat ze vervolgens proberen het probleem van de tussentijden te tackelen door ze een frequentiegrafiek van de tussentijden te laten maken. Het resultaat is grafiek 3. Mogelijke tussenstappen zijn:

- per klant in de volgorde waarin deze zijn binnengekomen
- in volgorde van kort naar lang

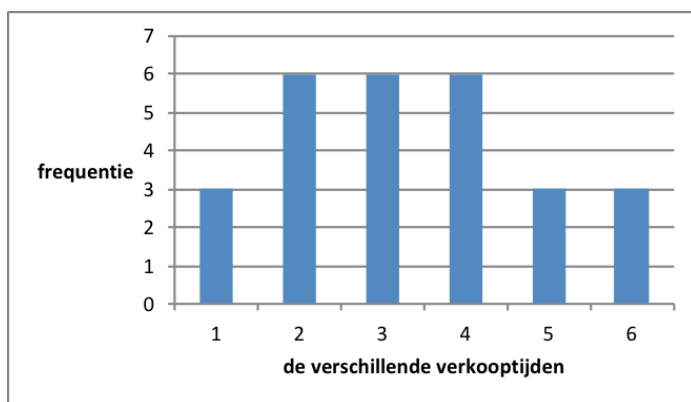
Grafiek 3 en grafieken van de tussenstappen staan ook op www.rekenen-wiskunde21.nl.

Wellicht is het nuttig met de leerlingen de gelijkwaardigheid van de volgende twee uitspraken te bespreken: ‘gemiddeld komt eens per twee minuten een klant aan’ en ‘de gemiddelde tijdsduur tussen twee opeenvolgende aankomsten is twee minuten’. Uiteraard kan het getal twee in een concrete situatie anders zijn. Het hoeft zelfs geen geheel getal te zijn. In tabel 1 is de gemiddelde tussentijd 5,41 minuut, dus 5 minuut en ruim 24 seconde.

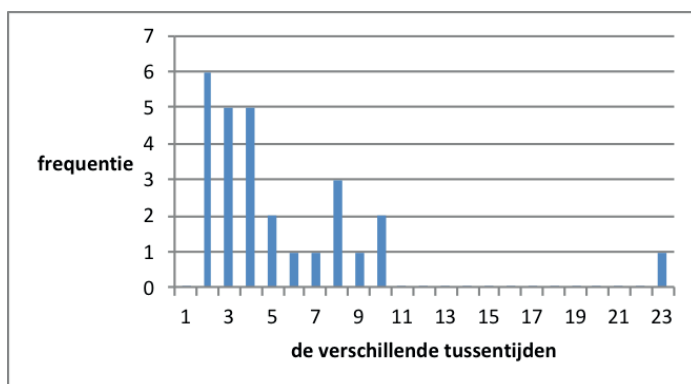
De tussentijden zien er misschien wat chaotisch uit, maar het lijkt er toch wel op dat relatief langdurige tussentijden relatief weinig voorkomen, terwijl relatief korte tussentijden vaker voorkomen.

Vervolgens gaat de aandacht naar de verkooptijden, zie grafiek 2. Het is verstandig eerst met de leerlingen te discussiëren over de vorm van de frequentieverdeling. Wellicht zullen ze weer veel korte en weinig lange tijdsduren verwachten, maar hier ligt een verdeling rond een gemiddelde meer voor de hand. Dat blijkt dan ook uit het resultaat, zie grafiek 2. De gemiddelde verkooptijd is hier 3,33 (dat is 3 minuut en bijna 20 seconde).

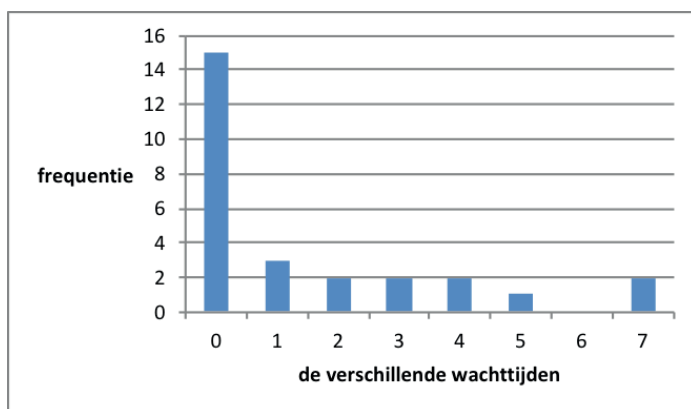
We hebben nu de verdeling van twee tijdsduren: de verkooptijd waarvan de verdeling is weergegeven in grafiek 2, en de tussentijd met de verdeling in grafiek 3. Het verschil tussen beide verdelingen is belangrijk. Globaal gesproken nemen de frequenties bij toenemende tussenaankomsttijdsduren



Grafiek 2. Verdeling van de 27 verkooptijden met de bijbehorende frequenties



Grafiek 3. Verdeling van de 27 tussentijden en de bijbehorende frequenties



Grafiek 4. Verdeling van de 27 wachttijden met de bijbehorende frequenties

af: na binnenkomst van een klant is het redelijk zeldzaam dat het lang duurt voor de volgende klant binnenkomt. De frequenties van de verkooptijdsduren die – weer globaal gesproken – min of meer symmetrisch ten opzichte van het gemiddelde liggen: tegenover bijna elke klant met een verkooptijd korter dan de gemiddelde verkooptijd staat een klant met een verkooptijd evenveel langer dan de gemiddelde verkooptijd.

Nu kunnen de leerlingen discussiëren over het volgende. In de situatie van tabel 1 met bijna 30 klanten en een totaal bekeken tijdsduur van bijna 150 minuten zijn er maar weinig klanten die lang moeten wachten. De vraag hierbij is vervolgens wat de invloed van de (gemiddelde) tussentijd en de (gemiddelde) verkooptijd op de wachttijd is. De som van alle 27 tussentijden vullen de tijd tot klant 27 binnenkomt volledig op. De som van alle 27 verkooptijden is 90 minuten, dus ruim minder dan het tijdstip 148, het eindtijdstip van klant 27. De leerlingen kunnen vermoeden dat kortere gemiddelde tussentijd, bijvoorbeeld 3 minuten zodat het tijdsverloop tussen de binnenkomst van de eerste en de laatste klant ongeveer 90 minuten is, tot grotere wachttijden zal leiden. Met andere woorden: als de gemiddelde tussentijd ongeveer gelijk is aan de gemiddelde verkooptijd zullen de wachttijden toenemen.

Dit kan bijvoorbeeld op de volgende manier onderzocht worden. Leerlingen kunnen vragen wat er gebeurt als er vaker dan in de situatie van tabel 1 klanten binnenkomen. In tabel 1 komt er gemiddeld een klant binnen per iets meer dan vijf en halve minuut. In de nieuw gesimuleerde situatie is de gemiddelde tussentijd 3 minuten. De gemiddelde verkooptijd is vrijwel gelijk gebleven, ook 3 minuten. Er is nu een simulatie met 30 klanten gemaakt.

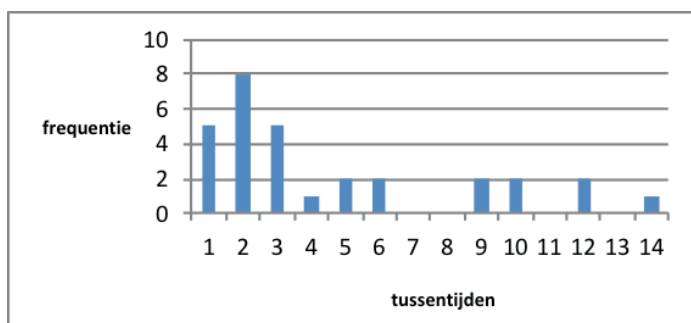
Op www.rekenenwiskunde21.nl staan voorgeprogrammeerde Excel-bladen waarmee dit gesimuleerd kan worden. Ook zijn daar de grafieken beschikbaar met de resultaten van een simulatie met een kortere gemiddelde tussentijd. In grafiek 5a staat de verdeling van de tussentijden bij een gemiddelde tussentijd van 3 minuten. In grafiek 5b staat de verdeling van de wachttijden. De verdeling van de verkooptijden is iets veranderd: gemiddelde verkooptijd is ook 3 minuut.

De leerlingen kunnen de gemiddelde wachttijd uitrekenen. Die is hier iets meer dan 2 minuut en 6 seconde, terwijl die bij de gegevens van tabel 1 bijna anderhalve minuut is.

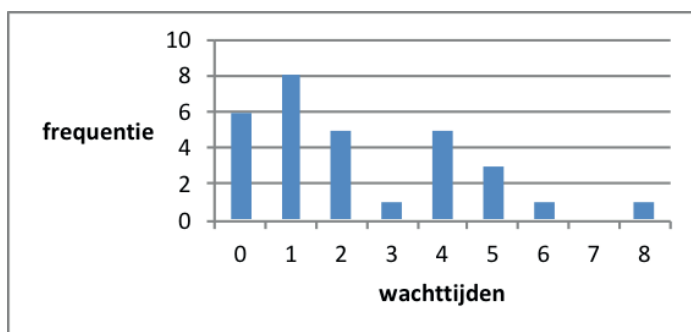
De conclusie moge duidelijk zijn: hoe korter de gemiddelde tussentijd, des langer de wachttijden.

In deze discussie kunnen ook de volgende punten aan de orde komen.

- 1 Zowel bij tabel 1 als bij grafiek 5b is de spreiding 1,5 minuut. Wat is de invloed als die kleiner is, dus vrijwel alle klanten een ongeveer even lange verkooptijd hebben?
- 2 We zijn voor de verkooptijd uitgegaan van min of meer symmetrische verdeling. Maar het is zeker niet uit te sluiten dat er twee soorten klanten zijn: zij die snel afgehandeld worden en zij die een echt langere verkooptijd nodig hebben. Wat voor invloed heeft dat?



Grafiek 5a. Verdeling van 30 tussentijden met gemiddelde tussentijd 3 minuten



Grafiek 5b. Verdeling van de 30 wachttijden met gemiddelde tussentijd van 3 minuten en gemiddelde verkooptijd van 3 minuten

Samenvatting les 2

Conceptualiseren en mathematiseren van de verdeling van de tussenaankomsttijdsduren

- *Oriënteren* op variatie door de leerlingen de kolommen met de tussenaankomsttijdsduren en verkooptijd van tabel 1 te laten bestuderen.
- *Reflecteren* en expliciteren gebeurt door leerlingen te laten uitleggen hoe zij de variatie in tussenaankomsttijdsduren kunnen vangen met het staafdiagram van de frequentieverdeling van de tussenaankomsttijdsduren. Daarbij kunnen zij het verschil tussen de verdeling van de tussenaankomsttijdsduren en van de verkooptijdsduren verwoorden: de eerste loop ruwweg as, de tweede is min of meer symmetrisch.
- *Consoliderend* en *verwerkend* gaan de leerlingen aan de hand van de frequentieverdelingen van de tussenaankomsttijdsduren, de verkooptijdsduren en de wachttijden dat een langere gemiddelde verkooptijd bij dezelfde gemiddelde tussenaankomsttijdsduren tot behoorlijk oplopende wachttijden kan leiden.

Tot slot het antwoord op de globale startvraag. Er ontstaat een 'eindeloze' wachtrij als de gemiddelde verkooptijd gelijk is aan of groter is dan de gemiddelde aankomsttijdsduur.

Bronnen

Drijvers, P., Van Streun, A. & Zwaneveld, B. (red.). (2012). Handboek wiskundendidactiek. Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Perrenet, J.C., & Zwaneveld, B. (2012). The Many Faces of the Modelling Cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3-21.

Van Streun, A. (2012). Leren en onderwijzen van wiskunde. In P. Drijvers, A. Van Streun & B. Zwaneveld (red.), *Handboek wiskundendidactiek* (pp. 3–52). Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Tabellen, grafieken, Excelbladen

Op de website www.rekenenwiskunde21.nl staan een aantal bestanden die bij de lessen gebruikt kunnen worden. De Word-bestanden kunnen als werkbladen worden uitgedeeld. De Excel-bestanden kunnen gebruikt worden om leerlingen berekeningen of simulaties te laten uitvoeren.