

Statistiekonderwijs in de onderbouw voor vandaag en morgen

Vernieuwd statistiek onderwijs

Met ingang van 2015 is er een nieuw statistiek programma gestart voor de bovenbouw havo/vwo van het voortgezet onderwijs. De Commissie Toekomst wiskunde onderwijs (cTWO) was van mening dat het oude programma een te kunstmatig beeld van statistiek gaf. In dat oude programma stonden de data vaak al klaar, er werd door leerlingen vooral gerekend zoals het gemiddelde en de standaardafwijking, er werd weinig geredeneerd met de concepten als gemiddelde, standaardafwijking, verdelingen en er werd nauwelijks onderscheid gemaakt tussen populatie en steekproef. Het nieuwe programma zou tegemoet moeten komen aan deze bezwaren met de wens dat dit nieuwe programma een realistischer beeld zou geven van het gebruik van statistiek in de praktijk, in het vervolgonderwijs en beroep (Van Streun & Van de Giessen, 2007a, 2007b). Daarnaast zou het statistiekonderwijs leerlingen ook moeten vormen tot kritische burgers, die resultaten van statistiek kunnen begrijpen en interpreteren. Deze ontwikkelingen van het statistiek onderwijs zijn ook internationaal zichtbaar. Het Gaise project benadrukt het ontwikkelen van statistical literacy, door gebruik van echte data en ICT voor het analyseren van deze data, en het belang van conceptuele kennis en het gebruik van ICT om deze kennis te ontwikkelen (Franklin et al., 2005, 2007; Garfield & Ben-Zvi, 2009; Lee & Stangl, 2015; Shaughnessy, 2007; Zieffler et al., 2008).

Vernieuwing in de bovenbouw

CTWO formuleerde de wens dat de empirische cyclus als leidraad voor het onderwijs zou fungeren (Drijvers et al., 2012). Hoewel men inschatte dat er onvoldoende tijd beschikbaar was om leerlingen voldoende vaak deze empirische cyclus zelf te laten doorlopen, zouden de leeractiviteiten moeten passen in deze cyclus. Daarnaast werden een aantal big ideas geformuleerd: onderzoek begint met een onderzoeksvraag, er wordt onderscheid gemaakt tussen populatie en steekproef, er wordt gebruik gemaakt van ICT om realistische datasets te representeren en te exploreren, er is aandacht voor zowel kwalitatief als kwantitatief redeneren, er is aandacht voor variabiliteit, simulaties kunnen gebruikt worden ter ondersteuning van het kansbegrip, en er is een beperking van het aantal soorten problemen die bestudeerd worden, nl: er worden uitspraken gedaan over een populatieproportie of populatiegemiddelde op basis van steekproefresultaten, er wordt gekeken naar verschillen tussen twee groepen, en er wordt gekeken naar de samenhang tussen twee variabelen (deze laatste enkel kwalitatief). Bij deze problemen wordt gestart met kwalitatief redeneren, d.w.z. er wordt globaal gekeken naar representaties van data, zonder berekeningen. Na deze eerste inspectie van de data kunnen kwantitatieve uitspraken gedaan worden aan de hand van vuistregels. Voor de havo staan een aantal vuistregels op het formuleblad dat bij het eindexamen beschikbaar is. Op de havo werd statistiek opgenomen in het centraal schriftelijk eindexamen, maar op het vwo is er enkel een schoolexamen. Dit had als gevolg dat voor de havo het programma gedetailleerder beschreven moest worden (syllabus) en dat er aandacht besteed werd aan een herziening van het pilotmateriaal dat onder cTWO ontwikkeld was (cTWO, 2012a).

Voorgestelde vernieuwing voor onderbouw

Deze bijdrage gaat over de onderbouw. In de schoolboeken is nog weinig werk gemaakt de hierboven beschreven vernieuwing. Traditioneel laten de schoolboeken in de onderbouw bij een beperkte dataset representaties als staafdiagram en boxplot met de hand maken waarna ook centrummaten en spreidingsmaten berekend moeten worden (Van Streun & Van de Giessen, 2007a, 2007b). Als voorbereiding op het bovenbouwprogramma zou er, ons inziens, ook in de onderbouw gestart kunnen worden met de big ideas van het vernieuwde statistiekprogramma, waarbij de empirische cyclus als basis voor het onderwijs gekozen wordt. Een leerlijn zou er dan, bij benadering, als volgt uit kunnen zien: Er wordt gestart met aandacht voor een onderzoeksvraag over een populatie. Hierna wordt/zijn door middel van een steekproef data verzameld. Er wordt nagedacht over problemen die daarbij kunnen optreden. De data worden actief geordend en gerepresenteerd in diagrammen, tabellen en kentallen. Op basis hiervan worden via kwalitatief redeneren en/of via beslisregels conclusies getrokken over de populatie. Deze conclusies kunnen vaak niet met wiskundige zekerheid getrokken worden. Dit komt door de onzekerheid ten gevolge van het trekken van een steekproef uit een populatie en het feit dat beslissingsregels vaak arbitrair gekozen lijken te zijn. Hierbij moeten leerlingen wennen aan deze onzekerheid en enig gevoel en kennis ontwikkelen voor statistisch redeneren. Om de variabiliteit die optreedt bij het trekken van steekproeven uit populaties te bestuderen kan gebruik gemaakt worden van simulaties. Door middel van ICT kan zicht gekregen worden op verdelingen van steekproefuitkomsten.

De nadruk zal liggen op statistisch redeneren en niet zo zeer op berekeningen van bijvoorbeeld gemiddelden, medianen en kwartielen; op het interpreteren van representaties als staafdiagrammen, frequentiepolygonen en boxplots in plaats van het met de hand maken van deze representaties bij kleine datasets; op het leggen van verbanden tussen de verschillende representaties en welke informatie uit de verschillende representaties afgelezen kunnen worden. We gaan steeds uit van gegeven realistische datasets. Daarnaast kan aandacht besteed worden aan zelfstandig onderzoek door leerlingen waarbij zelf data verzameld worden (Van Streun & Van de Gissen, 2007a, 2007b).

De rol van kansrekening in de onderbouw kan, net als in de bovenbouw van de havo, beperkt blijven. Wel is een intuïtief begrip van onzekerheid nodig. Dit kan met behulp van simulaties aangeleerd worden. Voor de onderbouw van het VWO kan gestart worden met beperkte formele kansrekening.

De beschreven leerlijn is niet in tegenspraak met de *tussendoelen* die door cTWO (cTWO, 2012b) voor de onderbouw beschreven zijn:

Domein F: Informatieverwerking en onzekerheid

17. Data verzamelen, ordenen, interpreteren en vergelijken en grafische representaties van data maken, ook met behulp van technologie. De leerling kan:

17.1 Grafische weergaven van data (tabel, diagram) aflezen en interpreteren.

17.2 Data verzamelen ordenen, samenvatten en vergelijken met behulp van gemiddelde, modus, mediaan en spreiding (spreidingsbreedte en kwartielafstand) en conclusies trekken.

17.3 Bij datasets (van eenvoudige, praktische contexten) uitspraken over kansen beoordelen en voorspellingen doen.

17.4 Passende vaktaal herkennen en gebruiken bij het verwerken, aflezen, representeren en vergelijken van dataverzamelingen.

De hiervoor geschetste globale leerlijn voor de onderbouw proberen we verder te concretiseren door middel van voorbeeldopdrachten.

Naar leerlijnen statistiek voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs die aansluiten bij de vernieuwingen in de bovenbouw.

Statistiek komen leerlingen overal tegen: buiten school en in school in verschillende vakken (zoals aardrijkskunde (bosatlas), geschiedenis, biologie). In plaats van een formele start en/of vele berekeningen, lijkt het verstandig een leerlijn te kiezen waar gestart wordt met concrete probleemstellingen, die met gezond verstand en intuïtief aangepak kunnen worden. In deze fase volstaan kwalitatieve redeneringen. Pas nadat een noodzaak om preciezer te gaan werken is gevoeld, kan het rekenen aan statistische grootheden gestart worden. Veel onderwerpen kunnen gestart worden met bijvoorbeeld het vergelijken van groepen op basis van diagrammen of tabellen.

Statistisch redeneren in het kader van de empirische cyclus is een voorbeeld van een wiskundige denkactiviteit. Om hierin succesvol te zijn, zijn verschillende soorten kennis en vaardigheden nodig: parate kennis/vaardigheden van basis concepten, het kunnen herkennen wanneer deze ingezet kunnen worden in eenvoudige toepassingsproblemen, en (zowel algemene als specifieke) heuristieken en zelfvertrouwen om complexere problemen te kunnen aanpakken (Van Streun & Kop, 2017; Verschut & Bakker, 2012). Leerlingen zullen ondersteund moeten worden als zij niet op eigen kracht een opdracht tot een goed einde kunnen brengen. Essentieel is dan wel dat die hulp *niet* de complexiteit of de uitdaging van de opdracht reduceert door het bijvoorbeeld geheel te verknippen in ministapjes. Daarnaast zullen de leerlingen gestimuleerd moeten worden om zichzelf vragen te stellen als “Hoe staat het met de voortgang van mijn oplossen?”.

In de publicatie "Uitdagend gedifferentieerd vakonderwijs" (Janssen et al., 2016) wordt het uitgangspunt "hele taak eerst" voor alle schoolvakken gekoppeld aan een meer uitgewerkte beschrijving van gefaseerde hulp, met tal van voorbeelden voor het vak wiskunde.

Hoewel bij complexe opdrachten vaak verschillende soorten kennis en vaardigheden een rol spelen, proberen we in deze bijdrage juist onderscheid te maken tussen verschillende doelen. We maken onderscheid tussen de leerdoelen: het ontwikkelen van samenhangende kennisbasis van statistische kernconcepten, het leren oplossen van problemen, en het leren van redeneren en abstraheren (Van Streun & Kop, 2017). Op basis van deze redenering komen we tot de volgende categorieën opdrachten:

Van exploreren naar structuur

Denkopleidingen in te zetten voor de start van een nieuw deelgebied, met als doel de ontwikkeling van een samenhangend netwerk van concepten.

Van kennis naar probleemoplossen

Denkopleidingen om te leren basiskennis te gebruiken in niet-standaard situaties.

Van exploreren naar redeneren/abstraheren

Verdiepende denkopleidingen in het logisch redeneren en/of abstraheren. Hier passen ook opdrachten die het vertikaal mathematiseren beogen.

We lichten eerst deze verschillende categorieën toe.

Van exploreren naar structuur.

De focus van de opdrachten is de ontwikkeling van statistisch denkgereedschap. Dat denkgereedschap is vaak nog kwalitatief van karakter, maar in enkele situaties ook kwantitatief. Er wordt aandacht besteed aan beschrijvende statistiek met centrummaten en bekende diagrammen. Hierbij komen aan bod o.a. het gemiddelde, mediaan, spreidingsbreedte, en kwartielafstand en als standaard “plaatjes” de frequentietabel met klassen, staafdiagram, boxplot, cirkeldiagram, lijndiagram, 2x2 tabel, kruistabel, puntenwolken. Dit wordt aangeleerd met behulp van realistische databestanden en ICT. Het berekenen van statistische maten en/of het maken van statistische diagrammen met de hand staan in dienst van het kunnen interpreteren van resultaten die gemaakt zijn met behulp van ICT. Na deze exploratie wordt vastgelegd welk denkgereedschap tot de *parate kennis en vaardigheden (Weten dat)* behoren, dat ingezet kan worden bij complexer statistisch probleemoplossen.

Van kennis naar probleemoplossen

De focus bij deze opdrachten is op het probleem oplossen. Ook in niet standaard situaties zullen leerlingen het hoofd boven water moeten houden. Bij deze opdrachten wordt aandacht besteed aan bijvoorbeeld data exploratie, waarbij bij een gegeven data bestand door leerlingen zelf representaties en/of kentallen met ICT gemaakt/berekend moeten worden. Vervolgens zullen ze hiermee de onderzoeksvraag moeten beantwoorden. De focus ligt op het zelfstandig kiezen van een strategie: Welke representatie/kentallen heb ik nodig? Hoe kan ik die maken?

Van exploreren naar redeneren/abstraheren

In deze fase zal aan onderzoeksopdrachten gewerkt worden, waarin de empirische cyclus als leidraad fungeert. De onderzoeksvraag zal hier nadrukkelijk aandacht verdienen. In eerste instantie zal enkel de gehele populatie in beeld gebracht moeten worden; later zal met een steekproef gewerkt worden, waarna op basis van een steekproef een uitspraak over een (kleine) populatie gedaan moeten worden, waarbij een onzekerheid in acht genomen moet worden.

Bij de ontwikkeling van eigen statistisch gereedschap kan gebruik gemaakt worden van guided reinvention.

In deze opdrachten zal ook “kritisch kijken” naar statistische resultaten en methoden aan bod moeten komen en zich bewust worden van de keuzes die gemaakt zijn bij het beantwoorden van de onderzoeksvraag. Het is misschien vreemd maar we moeten rekening houden met het feit dat voor sommige leerlingen, op dit moment, dit statistiekonderwijs tegelijkertijd eindonderwijs in het voortgezet onderwijs is.

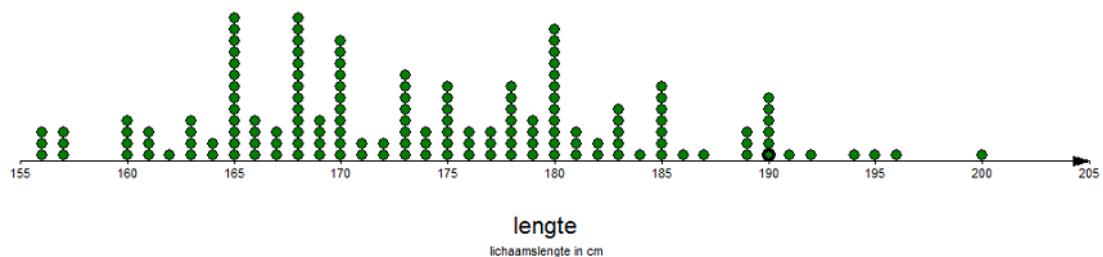
Hier volgen nu enkele voorbeelden om bovenstaande te illustreren. Dit zijn voorbeelden van opdrachten die gebruikt kunnen worden in een leerlijn, maar vormen op zichzelf geen leerlijn. Zoals reeds aangegeven, zullen de opdrachten vaak zodanig zijn dat meerdere doelen tegelijkertijd aan bod komen. De indeling is gemaakt op basis van het hoofddoel van de opdracht.

Van exploreren naar structuur

Voorbeeld 1

Leerlingen moeten leren hoe ze staafdiagrammen en boxplots kunnen aflezen. Dit kan geleerd worden via het zelf structureren van een data set. We kiezen voor een data set

van 154 leerlingen van havo 4. We weten verschillende “dingen” van deze leerlingen, waaronder de lengte. In eerste instantie geven we de lengte van iedere leerling aan op een getallenlijn: we maken een dotplot. In een dotplot zie je de lengte van iedere leerling aangegeven.

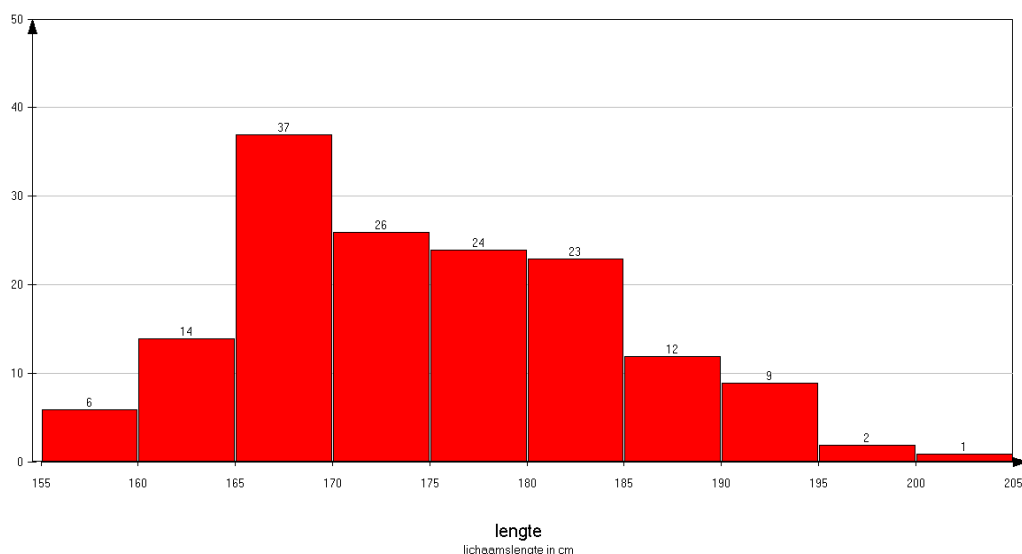


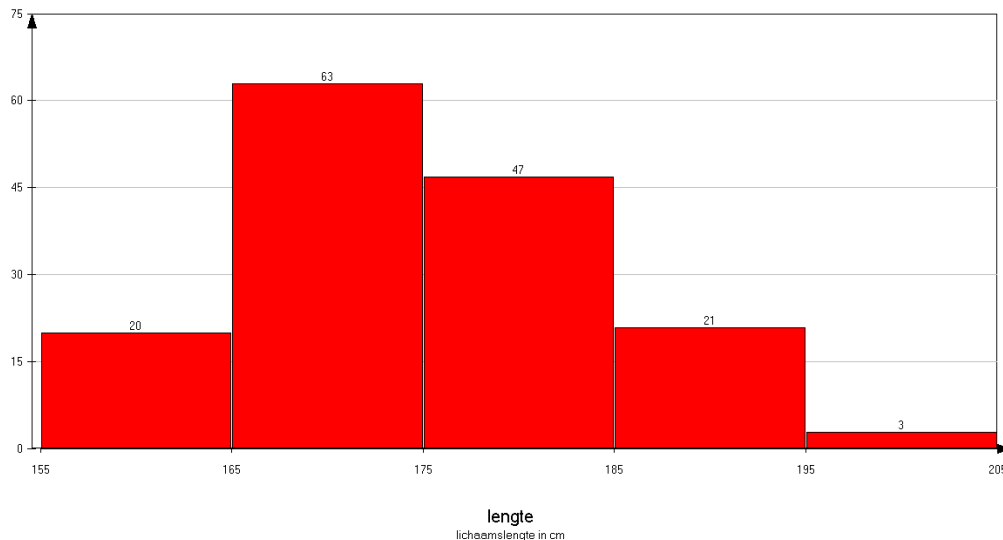
Vaak is het echter niet nodig om zulke gedetailleerde informatie te hebben. Als men geïnteresseerd is in vragen als “vanaf welke lengte hoort een havo 4 leerling tot de de 25% langste havo 4 leerlingen?” of “hoeveel procent van de havo 4 leerlingen heeft een lengte tussen de 160 cm en 180 cm?”, dan kan volstaan worden met andere diagrammen.

De centrale vraag aan leerlingen is nu: Hoe kun je deze data groeperen en nieuwe diagrammen bedenken om de gegevens uit de dotplot weer te geven?

Dit kan bijvoorbeeld door te kijken hoeveel leerlingen lengte hebben tussen 155 cm en 160 cm, tussen 160 cm en 165 cm, enz. Dus steeds kijken hoeveel leerlingen in een klasse zitten van 5 cm breed. Ook andere klassenbreedten kunnen gekozen worden. Ook de vraag: Welke klassenbreedten zijn zinvol in deze situatie? Moet aan bod komen.

Dit resulteert in diagrammen als:

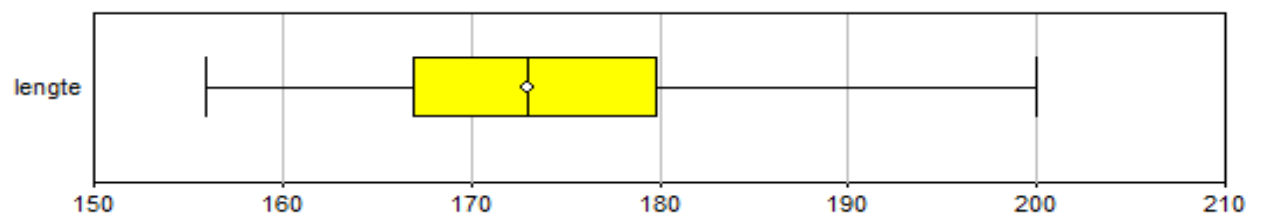




Belangrijk is dat het verband tussen de dotplot en de twee staafdiagrammen uitgebreid bestudeerd wordt door leerlingen. Dit bijvoorbeeld door vragen als: Hoe volgt de hoogte van de staaf/staven tussen bijvoorbeeld 155 cm en 165 cm uit de gegevens van de dotplot?

Een hele andere manier om de data van de dotplot te groeperen is om groepen met eenzelfde omvang te maken, bijvoorbeeld vier groepen van $154/4 =$ (ongeveer) 38 leerlingen. Hieruit ontstaat een zogenaamd boxplot: vier gelijke groepen leerlingen met ieder 25% van de leerlingen. Maar ook andere keuzes kunnen gemaakt worden, zoals bijvoorbeeld 10 groepen van (ongeveer) 15 leerlingen gemaakt worden.

Ook nu weer moeten leerlingen het verband tussen de data van de dotplot en die van de boxplot bestuderen: Hoe volgen de grenzen in de boxplot uit het dotplot?



Voorbeeld 2

Alle leerlingen hebben al een notie van het begrip gemiddelde. We proberen eerst deze kennis te mobiliseren en daarop voort te bouwen.

Het woord gemiddelde had oorspronkelijk de betekenis van 'het midden houdend tussen uitersten' en rekenkundig 'de waarde hebbend, die men krijgt door het totaal der waarden te delen door het aantal'. Hieruit ontwikkelde zich ook de vagere betekenissen 'zonder uitersten' dus 'gewoon, veel voorkomend' en ook wel 'middelmatig'.

Centrale vraag:

- a) Gemiddeld kom je in onderstaande zinnen tegen. Zeg in eigen woorden wat er precies bedoeld wordt.
 - 1) Een huis van gemiddelde grootte.
 - 2) Dat is een gemiddelde prestatie.
 - 3) De gemiddelde lengte is 1,80 meter.

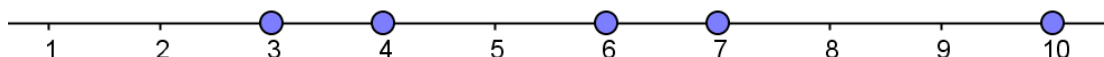
- 4) Hij loopt gemiddeld zo'n 10 km hard op een door-de-weeks avond.

Uitmiddelen

Op school wordt het gemiddelde gebruikt om een rapportcijfer te berekenen. Dit gemiddelde cijfer wordt bepaald door het aantal tekortpunten gelijk te maken aan het aantal overpunten. Bekijk het voorbeeld:

Bij de cijfers 6,6,7,9 is het gemiddelde 7. In dit voorbeeld leveren de twee 'zessen' beide 1 tekort (dus samen 2 tekortpunten) en de 'negen' 2 overpunten. Dus bij 'zeven' is het geheel in evenwicht.

- b) Bepaal op deze manier het gemiddelde van de cijfers in onderstaande figuur.



Die tekort- en overpunten noemen we vaak de afwijkingen ten opzichte van het gemiddelde.

Hieronder zie je vier van de vijf repetitiecijfers vermeld.

- c) Hoeveel moet deze persoon voor de vijfde repetitie halen om gemiddeld een 7,5 te staan? Controleer je antwoord door alle afwijkingen ten opzichte van het gemiddelde op te tellen.

	Rep 1	Rep 2	Rep 3	Rep 4	Rep 5
Cijfer	6	7	9	6	
Afwijking	-1,5	-0,5			

Soms tellen sommige repetities meer mee dan andere.

- d) Bereken het gemiddelde na vier repetities. En bereken welk cijfer deze persoon moet halen voor de vijfde repetitie om na vijf repetities gemiddeld een 7,5 te staan.

	Rep 1 Weging 2	Rep 2 Weging 3	Rep 3 Weging 2	Rep 4 Weging 2	Rep 5 Weging 4
Cijfer	6	7	9	6	
Afwijking	2x-1,5				

We kijken naar een repetitie van een hele klas. In de tabel zie je hoe vaak de cijfers voorkwamen.

Cijfer	6	7	8	9	10
Aantal keer	5	8	7	3	2

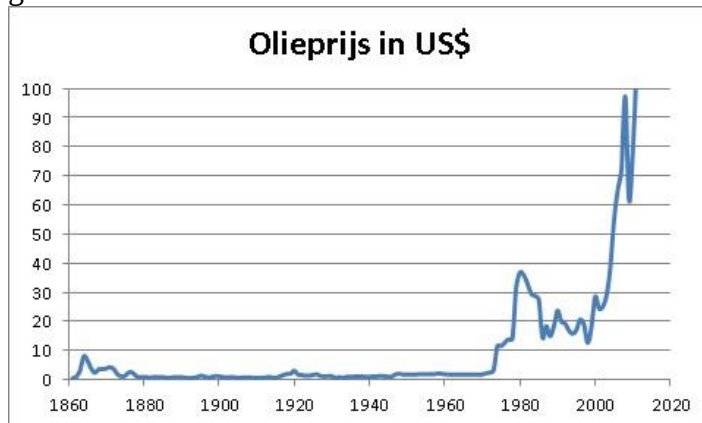
- e) Bereken het gemiddelde cijfer van deze klas.

Voorbeeld 3

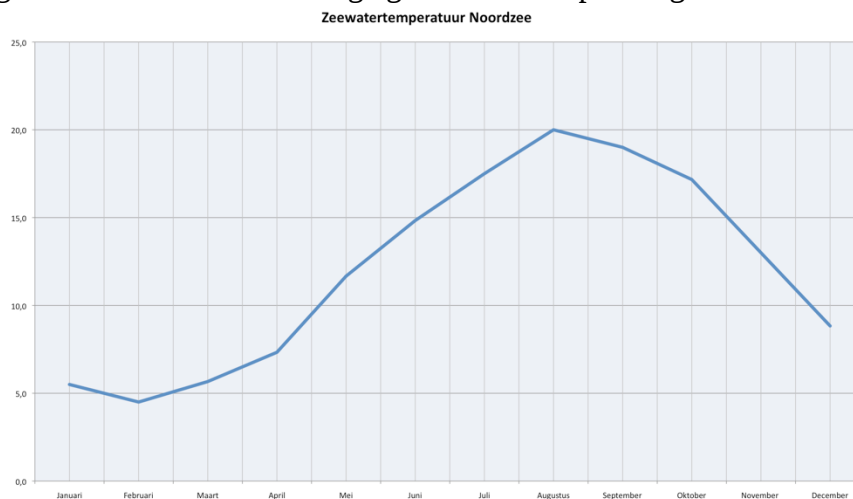
Variatie in de resultaten zie je bijna overal en altijd. Dit is een oriënterende opgave waaraan leerlingen eerst zelf kunnen werken voordat in een klassengesprek de antwoorden verder uitgediept kunnen worden.

Centrale vraag:

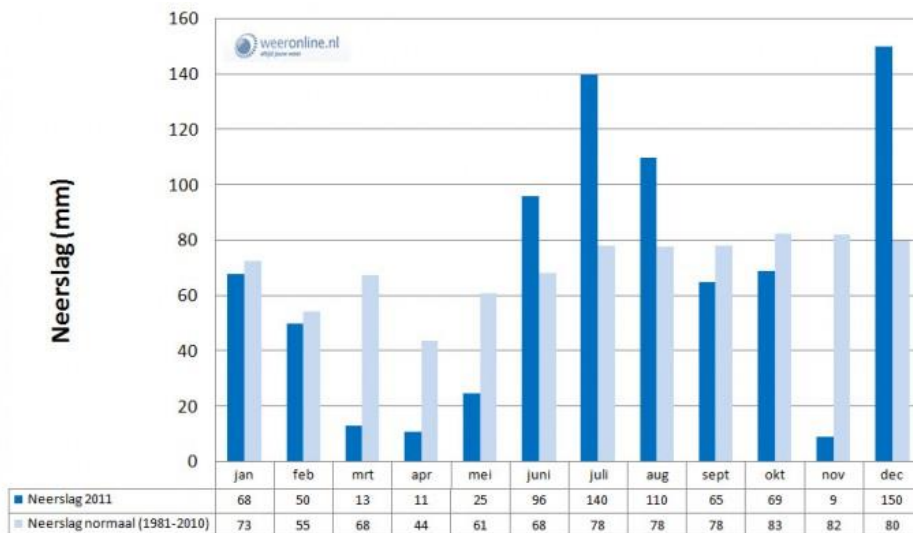
- a) De prijs van een vat olie gedurende de periode van 1860 tot 2013. Vind je de spreiding in de olieprijsen in de afgelopen 150 jaar groot? Licht je antwoord toe? Teken een denkbeeldige grafiek als je de spreiding in de olieprijsen groter vindt.



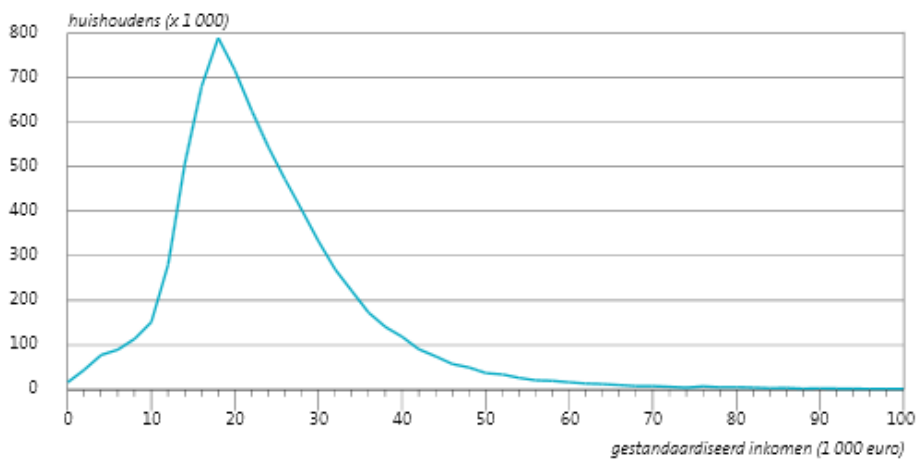
- b) De temperatuur van het zeewater gedurende een jaar. Vind je de spreiding groot? Geef een denkbeeldige grafiek als de spreiding kleiner zou zijn.



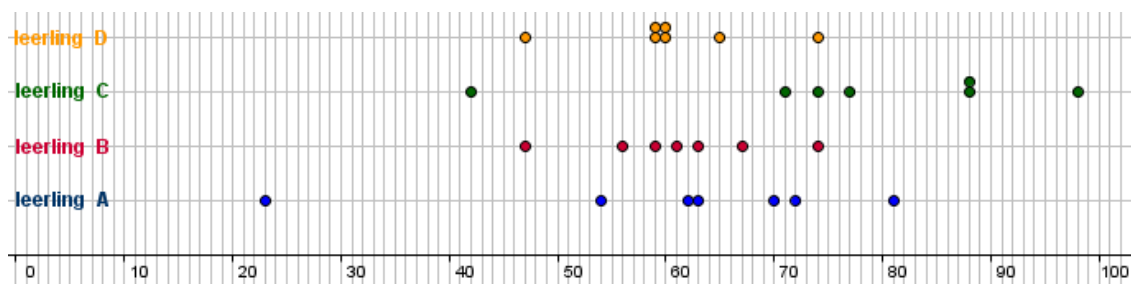
- c) De neerslag in De Bilt in 2011 in vergelijking met de 'normale' neerslag. Is de spreiding in de neerslag over de maanden in 2011 in de Bilt groter dan de 'normale' neerslag?



- d) De inkomensverdeling. Teken een denkbeeldige inkomensverdeling waarbij de spreiding groter is.



- e) Je ziet hier de SE-cijfers (schoolexamencijfers) van enkele leerlingen aan het eind van HAVO 5. Geef aan welke leerling het hoogste gemiddelde heeft. Geef aan welke leerling het grootste spreiding heeft.



Toelichting

Leerlingen hebben al een notie van het begrip variatie (spreiding); we proberen eerst deze kennis te mobiliseren en daarop voort te bouwen. Nadrukkelijk komt eerst dit

kwalitatief redeneren voordat er gerekend wordt en voordat allerlei stappenplannen en formele definities aan bod komen.

Voorbeeld 4

Data exploreren doe je in principe met behulp van ICT.

In deze oefening ga je een leerling, Wouter, volgen. Wouter is een van de 154

leerlingen in de dataset ► **school.vus**.

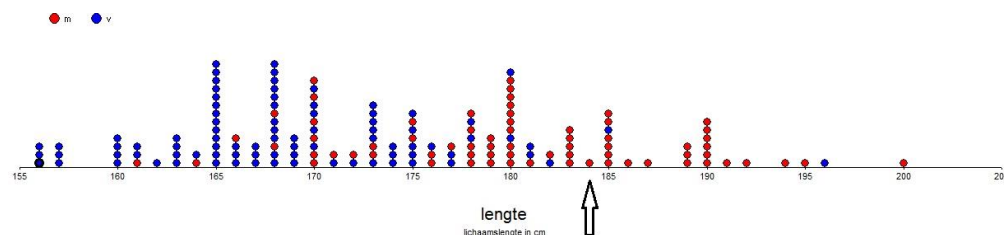
Hij is 184 cm lang en weegt 68 kg. Zijn cijfergemiddelde is 7,5. We vergelijken deze gegevens van Wouter met die van andere leerlingen.

Om dit te doen kijken we naar een aantal representaties van de gegevens. Bij iedere representatie kun je Wouter terugvinden, maar niet elk plaatje geeft dezelfde informatie. In deze paragraaf bekijken we alle plaatjes apart, en bekijken we welke informatie hier uit te halen is.

Centrale vraag:

Je krijgt steeds een voorbeeld te zien met de variabele gewicht. Je gaat daarna zelf met behulp van ICT een plaatje maken van de lengte en ook een van het cijfergemiddelde. Beantwoord weer de vragen over Wouter (net zoals in het voorbeeld).

Dotplot



De plek van Wouter is aangegeven. Het is duidelijk te zien dat Wouter bij de langere leerlingen in de groep hoort.

- Maak met gebruik van ICT een dotplot voor gewicht en voor cijfergemiddelde. Wijs Wouter aan in je grafieken en geef een omschrijving van Wouter's gewicht en cijfergemiddelde ten opzichte van de rest van de groep, gebruik alleen de informatie die je in de dotplots kunt zien.

Frequentietabel

In de frequentietabel staat per klasse hoeveel waarnemingen hier in zitten.

lengte	Freq.
155 - 159	6
160 - 164	14
165 - 169	37
170 - 174	26
175 - 179	24
180 - 184	23
185 - 189	12
190 - 194	9

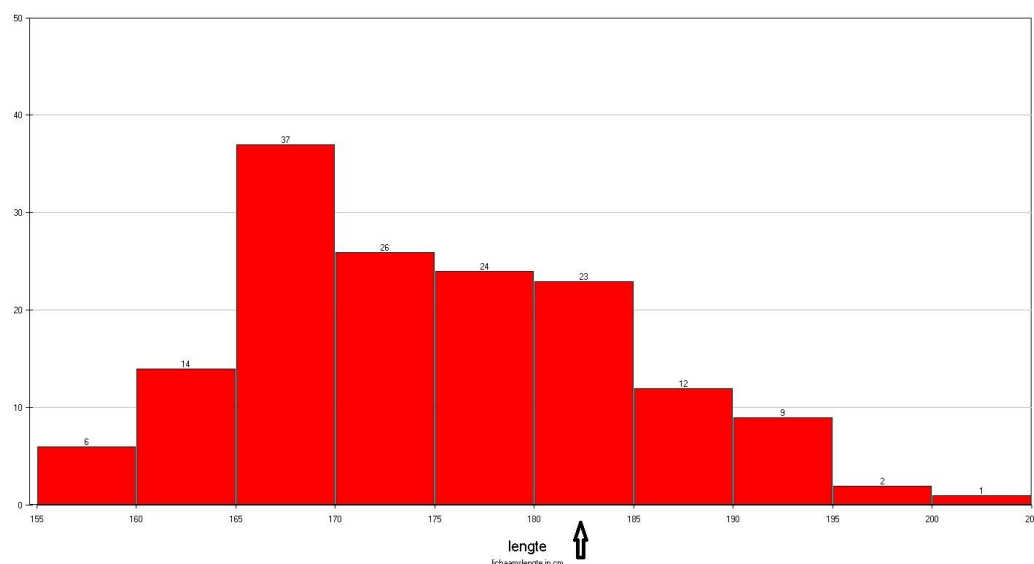
195 - 199	2
200 - 204	1
Totaal	154

Wouter zit in de klasse 180-184. Maar je kunt Wouter nu niet meer individueel aanwijzen. Je verliest informatie over het individu wanneer je een frequentietabel met klassen maakt. Toch wordt dit heel vaak gedaan. Uit de tabel blijkt dat 23 leerlingen ongeveer even lang zijn als Wouter. Hij zit niet in de groep waar de meeste leerlingen inzitten, hij is dus langer dan de modale lengte. De lengte-klasse van Wouter zit wel net iets boven het gemiddelde. Wouter is dus niet uitzonderlijk lang.

- b) Maak met gebruik van ICT een frequentietabel voor gewicht en cijfergemiddelde. Denk na over de klassenindeling. Wat kun je over Wouter's gewicht en cijfergemiddelde zeggen wanneer je alleen naar de frequentietabellen kijkt?

Staafdiagram

In een staafdiagram zet je de frequenties uit de frequentietabel in een grafiek.

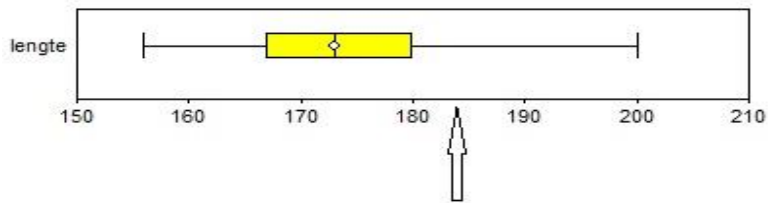


Wouter's lengte zit in de klasse 180-185 cm. Deze klasse is niet de klasse met de meeste leerlingen, maar er zitten relatief veel leerlingen in deze klasse. Meer naar rechts in de grafiek wordt het aantal leerlingen in de klassen snel kleiner. Wouter hoort bij de langere leerlingen, maar is niet uitzonderlijk lang.

- c) Maak een staafdiagram voor gewicht en cijfergemiddelde. Wat kun je over Wouter's gewicht en cijfergemiddelde zeggen wanneer je alleen naar de staafdiagrammen kijkt?

Boxplot

Bij een boxplot verlies je nog meer individuele gegevens. Om een boxplot te maken gebruik je de mediaan, het eerste en derde kwartiel en het maximum en minimum.



De minimale lengte = 156 cm De maximale lengte = 200 cm Mediaan = 173 cm Q1 = 167 cm Q3 = 180 cm	In ieder van de 4 stukjes van een boxplot zit 25% van de waarnemingen. Dus: - tussen het minimum en Q1 zit 25% van de waarnemingen - tussen Q1 en de mediaan zit 25% van de waarnemingen - tussen de mediaan en Q3 zit 25% van de waarnemingen - tussen Q3 en het maximum zit 25% van de waarnemingen.
--	---

De plek van Wouter is aangegeven. Wouter zit voorbij de box van de boxplot, dit betekent dat hij bij de langste 25% van de leerlingen hoort. Het is niet duidelijk hoe de verdeling binnen deze groep is, je kunt alleen nog zeggen dat hij niet het langste is.

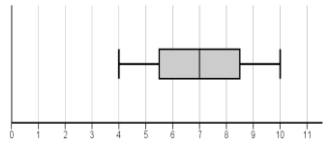
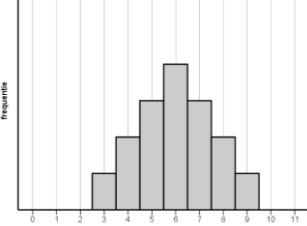
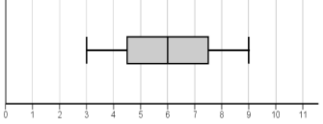
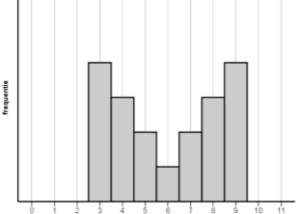
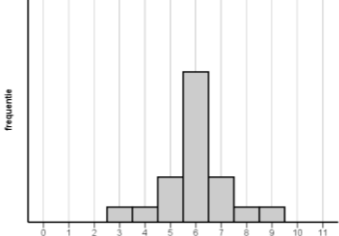
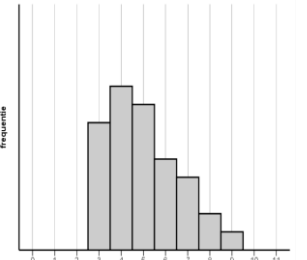
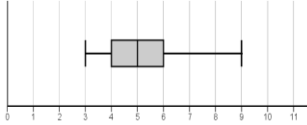
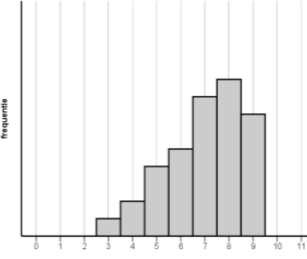
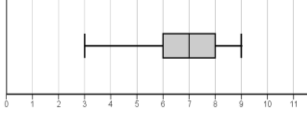
- d) Maak voor de variabelen gewicht en cijfergemiddelde boxplotten. Geef de plek van Wouter in beide boxplotten aan. Wat kun je zeggen over Wouter ten opzichte van de rest van de leerlingen?

Voorbeeld 5

Statistisch drietal

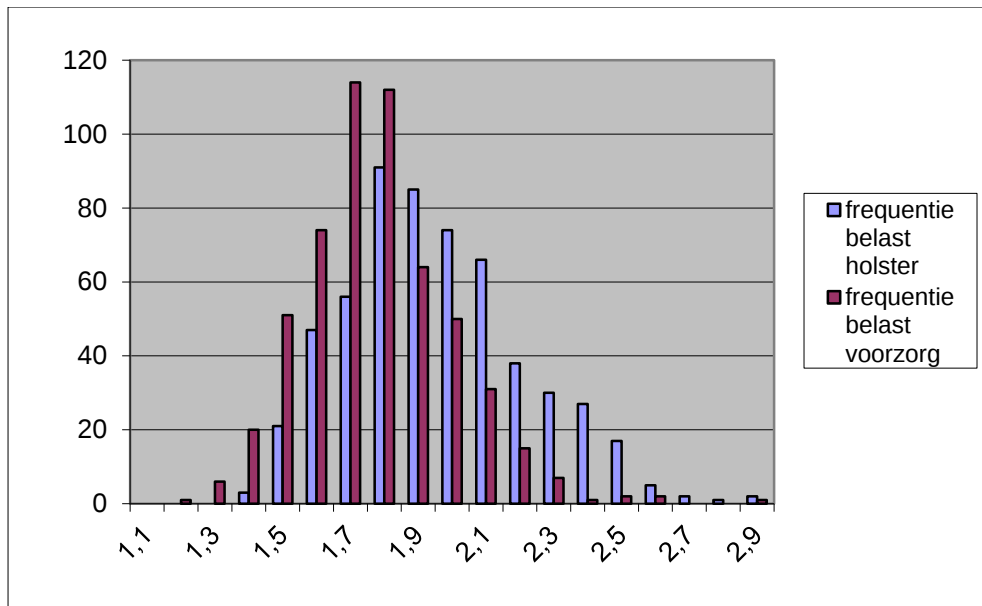
Centrale vraag: Hieronder staan van verschillende verdelingen steeds drie kaartjes. Knip de kaartjes uit en leg ze open op tafel. Zoek vervolgens samen met je groepsgenoten de drietallen (drie kaartjes behorend bij dezelfde verdeling).

	gemiddelde is 6. kwartielfafstand is 3	
	gemiddelde is 7. kwartielfafstand is 3.	

		gemiddelde is 6. kwartielafstand is 2.
		gemiddelde is 6. kwartielafstand is 4.
		
		
gemiddelde is 6. kwartielafstand is 1.	gemiddelde is 5. kwartielafstand is 2.	gemiddelde is 6. kwartielafstand is 1.

Voorbeeld 6

In een politieonderzoek je gekeken naar reactiesnelheid bij het schieten van politieagenten: hoe lang duurt het afvuren van een kogel? Er worden twee situaties vergeleken, namelijk: wapen in holster en wapen vrij (het wapen uit voorzorg al in de hand).



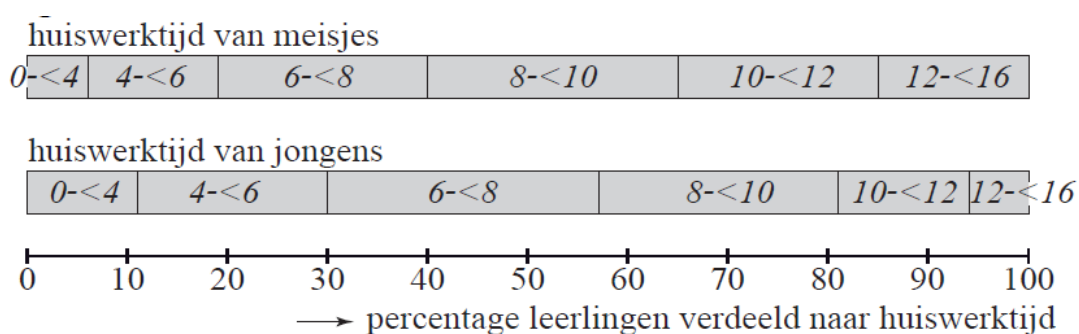
Centrale vraag: Bepaal op basis van de figuur bij welke situatie de reactietijd het langst is. Licht je antwoord toe.

Van kennis naar probleemoplossen

De focus ligt nu op het probleem oplossen: met bestaande kennis en vaardigheden een strategie bedenken en een probleem aanpakken. Het gaat dus om productieve kennis en vaardigheden. Vaak gaat het om eenmalige problemen. Noch het antwoord, noch de methode wordt opgenomen in het gereedschapskistje van de leerling. Bij de bespreking van dit soort problemen ligt de focus op 'hoe bedenk je een strategie'?

Voorbeeld 1

In een onderzoek naar de tijd die per week aan huiswerk besteed wordt, wordt de volgende figuur gemaakt.



Welke conclusies kun je trekken over de verschillen in gemiddelde en spreiding tussen jongens en meisjes met betrekking tot het aantal uren huiswerk per week. Licht je antwoorden toe.

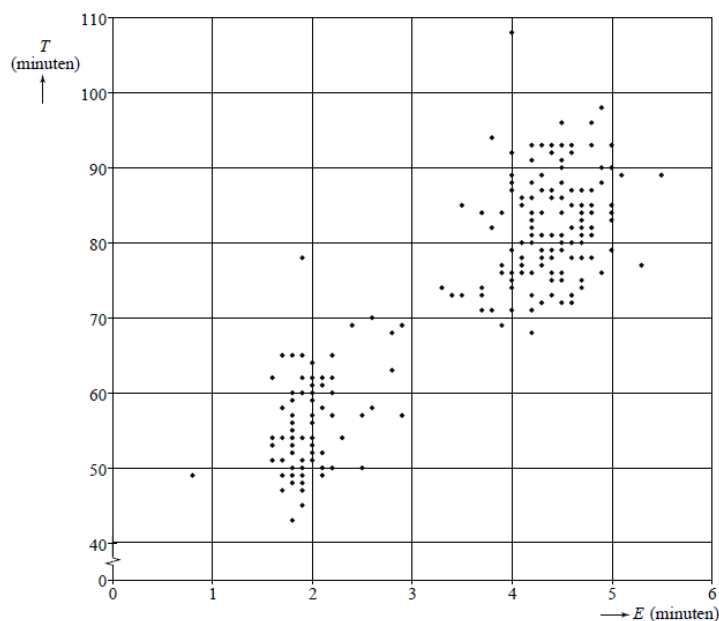
Voorbeeld 2

Van wikipedia:

Old Faithful is de beroemdste geiser in het Amerikaanse Yellowstone National Park in het Upper Geyser Basin. Van de vele geisers is deze de meest actieve; hij

blaast om de 60 tot 80 minuten hete dampen in de lucht. Old Faithful geldt als de grootste attractie van het park. Een uitbarsting kan tot 32.000 liter kokend water zo'n 56 m hoog spuiten. Reeds meer dan 137.000 uitbarstingen werden genoteerd, die anderhalve tot 6 minuten duren, met tussen iedere uitbarsting een half uur tot twee uur.

Hier zie je echte gegevens over Old Faithful. In de figuur zijn de eruptietijden en de tussentijden aangegeven. Zo is bijvoorbeeld het meest linkse punt in de figuur (0,8;49). Dit wil zeggen: de eruptie duurde 0,8 minuten en daarna was het 49 minuten rustig (de tussentijd was 49 minuten, d.w.z. het duurde 49 minuten voordat de volgende eruptie kwam).



Hoe kun je deze figuur gebruiken om voor toeristen te voorspellen hoe lang ze moeten wachten tot een volgende eruptie? Anders gezegd: Stel je bent parkopzichter bij deze geiser. Er komt een toerist bij Old Faithful aan en die wil de volgende eruptie zien. Wat is je werkwijze om te voorspellen hoe lang de toerist moet wachten?

Bij deze opdracht kan ook een databestand met de variabelen eruptietijd en tussentijd gegeven worden, waarna leerlingen zelf diagrammen en kentallen moeten maken met behulp van ICT.

Voorbeeld 3

Een basketbalteam speelt met 5 spelers in het veld. Vaak twee “kleine” spelers (guards), twee forwards en 1 lange man (center).

Bij basketbalwedstrijden worden allerlei acties bijgehouden, waaronder het aantal schotpogingen en ook het aantal treffers daaruit.

Hieronder zie je dat voor guard 2 van team B geldt dat hij 3 van 7 schotpogingen raak schoot (3/7), dat is een schotpercentage van 42%.

Team	Guard 1	Guard 2	Forward 1	Forward 2	Center	Team totaal
A	6/12=50%	5/10=50%	8/21=38%	1/2=50%	8/14=57%	28/59=47%
B	2/5=40%	3/7=42%	1/3=33%	1/3=33%		

Als de statistieken zijn ingevuld blijkt dat alle spelers van team A een hoger schotpercentage hebben dan de overeenkomstige spelers van team B. Maar zou het mogelijk zijn dat team B als team een hoger percentage (team totaal) heeft? Licht je antwoord toe.

Soms is het verstandig om alvast wat hulp voor leerlingen te organiseren, die ze kunnen gebruiken als ze vastlopen of niet kunnen starten.

Hulp: Stel dat beide teams 59 schotpogingen hebben gemaakt.

Bedenk een mogelijk aantal schotpogingen en een mogelijk aantal treffers, zodat de center van team B een lager schotpercentage heeft dan de center van team A maar dat het percentage van het team totaal bij team B hoger is dan dat van team A

Van exploreren naar redeneren/abstraheren

Het gaat nu om statistisch redeneren en kritisch leren kijken naar statistische resultaten en onderzoeksopzet zonder dat de waarde van statistiek uit het oog verloren wordt. Daarnaast is een belangrijk onderdeel van een statistische leerlijn het ontwikkelen van gevoel en kennis over steekproeven: een grotere steekproef geeft in het algemeen een betere schatting van de populatieproportie of populatiegemiddelde dan een kleine steekproef. Simulaties en ICT helpen hier enorm.

Voorbeeld 1: uitspraak doen over populatie op basis van een steekproef (gedeeltelijk ontleent aan het onderzoek van Marianne van Dijke-Droogers (Dijke-Droogers, 2017))

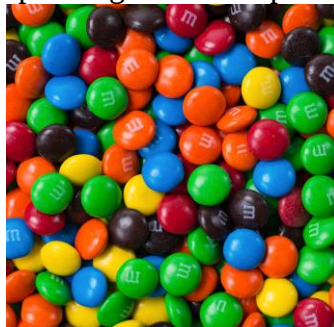
Leerlingen starten met een grote zak met M&M's met een klein venstertje. Ze zien enkel zoiets als:



De centrale vraag is om op basis van dit venstertje een voorspelling te doen van het percentage blauwe M&M's in de hele zak.

Leerlingen zullen het experiment een aantal keren uitvoeren en verschillende uitkomsten krijgen. Op deze wijze krijgen ze gevoel voor variabiliteit, die optreedt bij het nemen van steekproeven. Als je meerdere steekproeven neemt krijg je informatie over de spreiding in de steekproefresultaten.

Hierna kan uitgeprobeerd worden wat de invloed van de grootte van het venster is: wat is het gevolg van een grotere steekproef? Een groter venster geeft minder spreiding in de steekproefresultaten.

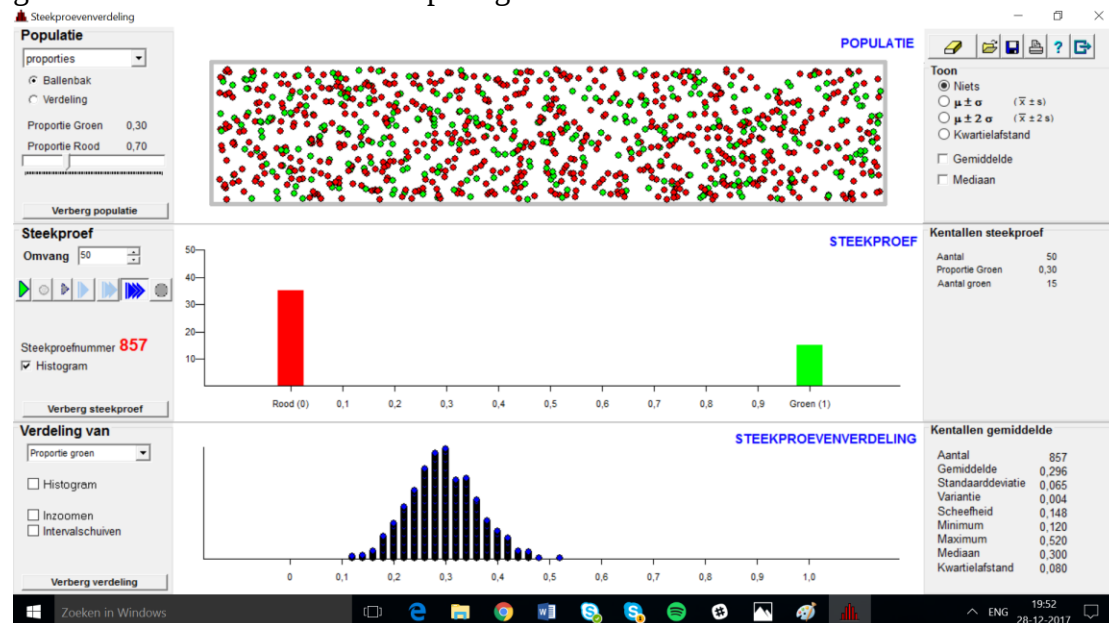


Als overstap naar simulaties met ICT kan overwogen nog gebruik te maken van kaartjes, die steeds informatie van een persoon bevat: een hoge hoed met daarin heel

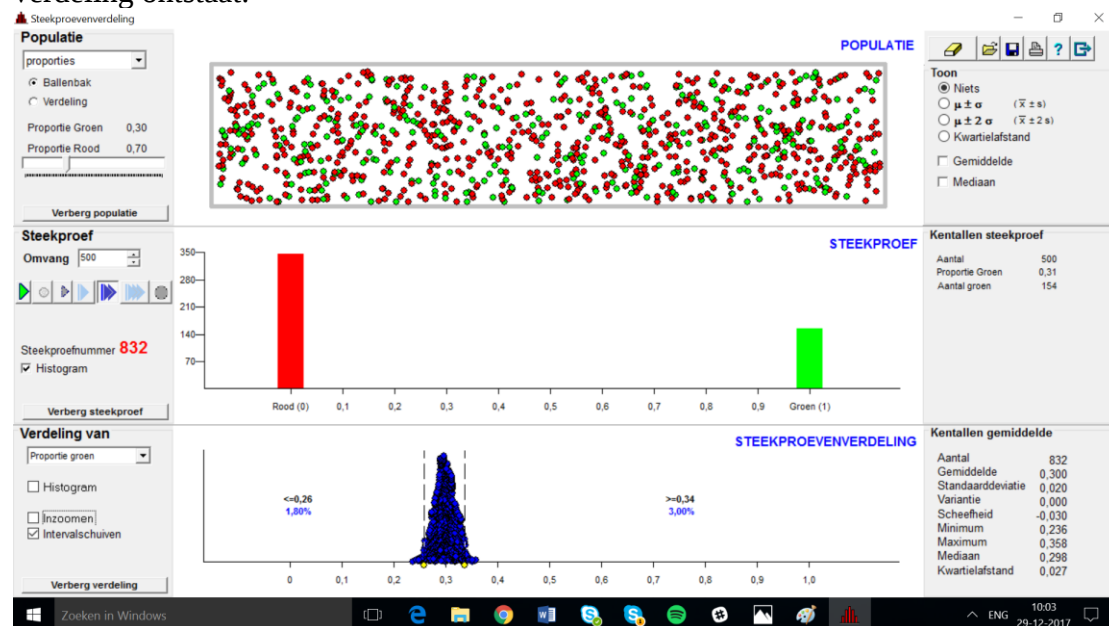
veel kaartjes (leerlingen) met bijvoorbeeld hun lengte, gewicht, aantal uren sport per week. Een steekproef bestaat dan uit een greep van een aantal kaartjes.

Hierna kan met ICT verder gevoel en kennis ontwikkeld worden over de rol van de steekproefgrootte.

Met het programma VUStat (of <https://www.vusoft.eu/apps/yesno/index.html>) kan bij een gegeven populatie proportie/gemiddelde vele steekproeven getrokken worden. Hieronder zie je de steekproefproporties als uit een populatie met een populatieproportie van 0,30 (populatiepercentage is 30%) steeds steekproeven getrokken worden met een steekproefgrootte van 50.



Je ziet dat na 857 steekproeven met steekproefgrootte 50 er een zogenaamde normale verdeling ontstaat.



Als de steekproefgrootte 500 is zie je dat de spreiding een stuk minder is. In de onderste figuur is aangegeven hoe via intervalschuiven het gebied van de middelste 95% van de uitkomsten gevonden kan worden: dit wordt het 95% gebied genoemd.

Dit 95% gebied is natuurlijk afhankelijk van de steekproefgrootte. Uitkomsten die buiten dit 95% gebied liggen, noemen we uitschieters. Bij een gegeven steekproefgrootte kan op deze wijze de breedte van een 95% gebied bepaald worden. Maar, in het algemeen nemen we niet veel steekproeven uit een populatie in verband met kosten of onmogelijkheid daarvan.

Dus het kernprobleem is dat op basis van 1 steekproef met een bepaalde steekproefgrootte en een bepaalde steekproefuitkomst “iets” gezegd moet worden over de populatie (bijvoorbeeld het populatiepercentage).

Centrale vraag: Stel dat je nu een goede steekproef neemt van 50 leerlingen uit de populatie van alle leerlingen in een bepaalde stad. Je vindt dat 64% in de steekproef bij een sportvereniging is ingeschreven. Wat kun je nu zeggen over het percentage leerlingen in die stad dat ingeschreven is bij een sportvereniging?

In een klassengesprek kan toegewerkt worden naar een antwoord als “als we aannemen dat dit steekproefresultaat niet een uitschieter was, dan zal het echte populatiepercentage waarschijnlijk liggen tussen 64% +/- 13% (de 13% gevonden via simulaties van steekproeven met steekproefgrootte van 50, die een breedte van het 95% gebied geven van (ongeveer) 26%)”.

Een dergelijk leertraject vergt zeker enige lessen, waarin leerlingen zelfstandig moeten kunnen exploreren en het verband tussen de breedte van het 95% gebied als spreidingsmaat en de steekproefgrootte expliciet voor een aantal steekproefgrootten vastgelegd moet worden.

Voorbeeld 2: Beoordelen van onderzoeksvragen en enquetevragen

Bijna alle leerlingen zullen in het vervolg van hun onderwijs en latere beroepsleven nog te maken krijgen met onderzoek. Het stellen van een goede vraag is moeilijk, tijdrovend en belangrijk. Leerlingen lijken dit pas later te ontdekken. Vandaar dat we in een vroeg stadium aandacht willen besteden aan het zorgvuldig formuleren van onderzoeksvragen.

Bekijk de volgende probleemsituaties en formuleer bij elk een heldere onderzoeksvraag (of vragen):

- a) Wat is het succes van bijles?
- b) Wat willen havo leerlingen doen in hun vrije tijd?
- c) Spijbelen havo leerlingen?

Wat mankeert er aan de volgende enquête vragen en formuleer voorstellen tot verbeteringen (eventueel meerdere verbeteringen).

- a) De film Grease is door heel veel mensen gezien. Heb jij deze gezien?
- b) Hoeveel boeken heb je het afgelopen jaar gelezen?
- c) Lees je een krant, zoals de Volkskrant of Algemeen dagblad?
- d) Denk je dat criminaliteit beter bestreden kan worden? Ja/Nee

Voorbeeld 3: Conclusies trekken

- a) Om te testen of aspirine helpt tegen hoofdpijn, krijgen 50 mensen aspirine. Dertig blijken na 2 dagen geen hoofdpijn te hebben. Kun je nu concluderen dat aspirine helpt tegen hoofdpijn?
- b) Bij een onderzoek in de VS bleek dat 45% van de mensen zich 's avonds op straat niet veilig voelde. De steekproef was 1500 mensen groot.

Twee weken later wordt er weer aan 1500 mensen dezelfde vraag gesteld. De uitkomst is nu 47%.

De kranten schrijven 'De bevolking voelt zich steeds onveiliger'.

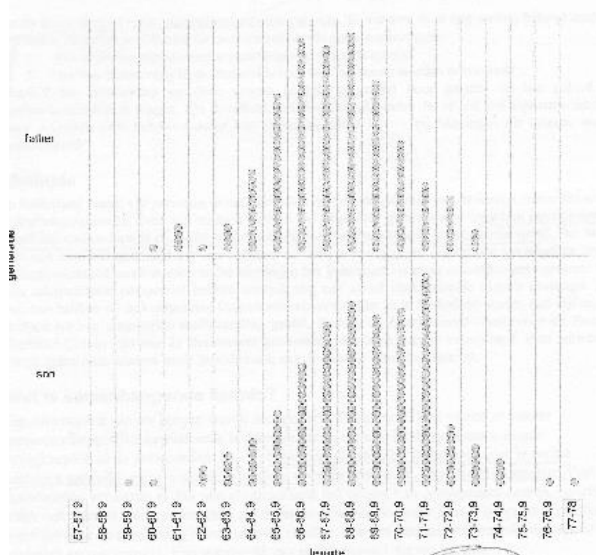
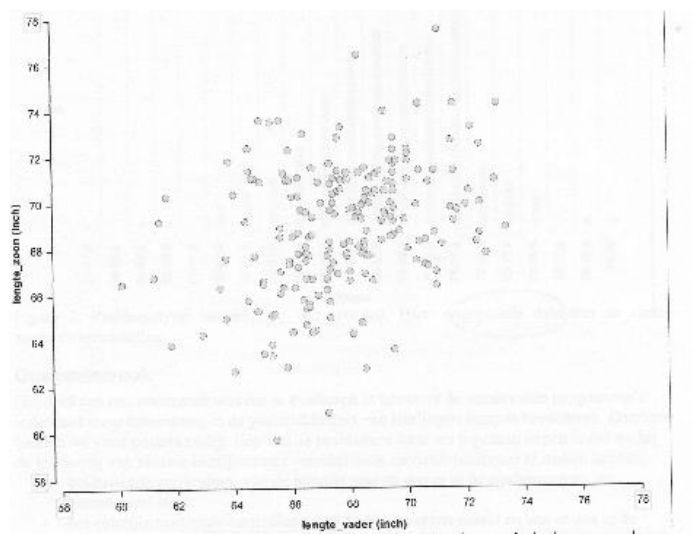
Waarom kun je kritiek hebben op deze conclusie.

- c) Er is een positief verband tussen (te) hoge bloeddruk en de hoogte van het inkomen. Advies: verlaag het salaris. Probeer een tegenargument te geven bij deze redenering.

Voorbeeld 4

Hier zie je twee bronnen van lengten van vaders en hun zonen: een puntenwolk en twee staafdiagrammen.

Bedenk voorbeelden van onderzoeksvragen die beter met de ene bron en die beter met de andere bron beantwoord kunnen worden.



Voorbeeld 5: Zelf onderzoek opzetten

- a) We willen weten welke van de twee Cola merken de mensen het lekkerste vinden.

Wat zou precies de onderzoeksvraag zijn? Hoe zou je dit onderzoek opzetten. Beschrijf heel precies hoe je dit zou proberen.

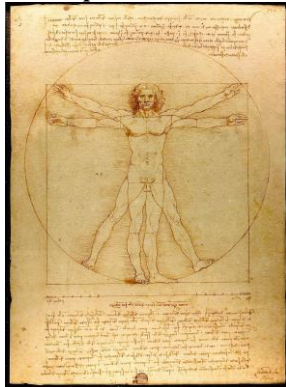
- b) In een onderzoek gaan we kijken naar de verschillen tussen leerlingen klas 3 en klas 4.

We kijken naar de wiskundige vaardigheid in klas 3, de leeftijd en de belangstelling voor kunst.

Maak een vragenlijstje om deze kenmerken te onderzoeken.

- c) Bedenk hoe je het volgende onderzoek zou kunnen uitvoeren. Bedenk welke data je verzamelt, welke representatie je gebruikt en hoe je een conclusie kunt trekken.

“Kun je met behulp van de lengte van een persoon zijn spanwijdte voorspellen?”



- d) “Zijn de woorden in het ene boek langer dan in het andere boek?”.

Neem twee boeken en bedenk hoe je deze onderzoeksvraag kunt beantwoorden.

- e) “Welke muziek is het meest populair op je school?”

Bedenk hoe je deze onderzoeksvraag kunt beantwoorden. Beschrijf je methode en hoe je conclusies kunt trekken.

In literatuur wordt aanbevolen leerlingen zelf onderzoek te laten uitvoeren. Een aandachtspunt daarbij is wel de reikwijdte van de uitspraken. De resultaten van een onderzoek op je eigen school kan waarschijnlijk niet zondermeer gegeneraliseerd worden naar alle scholen van Nederland. Dit leidt tot de aanbeveling om in klas 2 een “kleine” populatie te onderzoeken, die in zijn geheel “bevraagd” kan worden, zoals je eigen klas of eigen leerlaag op school of je eigen straat.

Voor klas 3 kan gewerkt worden met een steekproef. De populatie kan nu groter zijn, maar wel moet bedacht worden hoe een goede steekproef (aselect) uit de populatie getrokken kan worden. Een onderzoeksvraag kan nu gaan over bijvoorbeeld de school of een dorp (Franklin et al., 2005, 2007)

Afsluiting

Statistiek is overal in onze wereld aanwezig. Iedereen heeft te maken met statistisch onderzoek en statistische uitspraken en de gevolgen daarvan. Enig “statistical literacy” is onmisbaar om in deze wereld te kunnen functioneren. De ontwikkeling van deze literacy kan beginnen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Daarin zal in ieder geval aan bod moeten komen hoe met diagrammen en kentallen om te gaan, hoe op basis van steekproeven uitspraken gedaan kunnen worden over populaties en grip te krijgen op variabiliteit, en kritisch kijken naar conclusies uit

onderzoekgegevens. Om te zorgen dat leerlingen dit alles leren is het nodig dat er een zorgvuldige leerlijn ontwikkeld wordt, waarin, uitgaande van concrete en betekenisvolle contexten, leerlingen een statistisch gereedschapskistje ontwikkelen. Voor de ontwikkeling van een dergelijk gereedschapskistje zijn opdrachten nodig met verschillende doelstellingen, zoals opdrachten om te komen tot de ontwikkeling van een samenhangend netwerk van statistische concepten, opdrachten die oefenen om deze basiskennis te gebruiken in niet-standaard situaties, en opdrachten die oefenen in het redeneren en/of abstraheren. We betogen dat al deze aspecten aanbod moeten komen om leerlingen de eerste stappen te laten zetten in de richting van statistical literacy.

Referenties

- Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2012a). Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015. Utrecht: cTWO. <http://www.fi.uu.nl/cTWO/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf>
- Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (2012b). Overzicht tussendoelen wiskunde havo en vwo. Utrecht: cTWO
<http://www.fisme.science.uu.nl/cTWO/publicaties/docs/onderbouw/overzicht-tussendoelen-wiskunde-havo-en-vwo.pdf>
- Drijvers, P. H. M., Streun, A., & Zwaneveld, G. (Eds.). (2012). *Handboek wiskundendidactiek*. Epsilon Uitgaven.
- Dijke-Droogers, M. (2017). Lesbeschrijvingen project 'Statistical literacy hoe dan?'
<https://drive.google.com/file/d/0B4fDkw62lmbDaHJaTXR0YjVfdkk/view>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report. *Alexandria: American Statistical Association*.
<http://www.amstat.org/education/gaise>.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., ... & Holmes, P. (2005). A curriculum framework for preK-12 statistics education. *American Statistical Association Board of Directors for Endorsement*.
<http://it.stlawu.edu/~rlock/gaise/GAISEPreK-12.pdf>
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, 31(3), 72-77.
<https://www.causeweb.org/workshop/aims/Statistical%20Reasoning%20Learning%20Environment.pdf>
- Janssen, F., Hulshof, H., & Veen, K. van. (2016). Uitdagend gedifferentieerd vakonderwijs: Praktisch gereedschap om je onderwijsrepertoire te blijven uitbreiden. Leiden: Universiteit Leiden. Te raadplegen via <http://www.conferentietoptalent.nl/downloads/UitdagendGedifferentieerdVakonderwijs.pdf>
- Lee, H., & Stangl, D. (2015). Taking a Chance in the Classroom: Professional Development MOOCs for Teachers of Statistics in K-12. *CHANCE*, 28(3), 56-63.
- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 957-1009.

Streun, A. van, & Giessen, C. van de (2007a). Een vernieuwd statistiekprogramma deel 1: Statistiek leren met data-analyse. *Euclides*, 82(5), 176-179.
Streun, A. van, & Giessen, C. van de (2007b). Een vernieuwd statistiekprogramma deel 2: Data-analyse, een mogelijke opzet. *Euclides*, 82(6), 217-221.
http://www.platformwiskunde.nl/files/Examenprogrammas/Statistiek/Statistiek_1_euclides_82-5.pdf
http://www.platformwiskunde.nl/files/Examenprogrammas/Statistiek/Statistiek_2_euclides_82-6.pdf

Streun, A. van, & Kop, P. (2017). Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten onderbouw havo/vwo. SLO. <http://www.slo.nl/organisatie/recentepublicaties/00155/>

Verschut, A., & Bakker, A. (2012). Samenhangende kennis: Hoe bevorder je die bij statistiek en kansrekening?. *Nieuwe Wiskrant*, 31(3), 32-38.

Zieffler, A., Garfield, J., Alt, S., Dupuis, D., Holleque, K., & Chang, B. (2008). What does research suggest about the teaching and learning of introductory statistics at the college level? A review of the literature. *Journal of Statistics Education*, 16(2), 1-23.

Materialen:

Syllabus voor Havo Wiskunde A met bijlage (voorbeeldopgaven)

<https://www.examenblad.nl/vak/wiskunde/2017>

Voorbeeldopgaven havo https://www.hetcvte.nl/item/voorbeeldexamenopgaven_havo_a_2

VU-Stat en VUStat bestanden

<http://www.vusoft.be/vustat.html>; <http://www.rustroest.eu/slodwo>

Lesmateriaal SLO (boekjes 1 tm 4) op

<http://www.betanova.nl/downloads/lesmateriaalWiskundeAHavo/>

Boekje 2 van SLO materiaal in DWO: <http://app.dwo.nl/leerling/>