De (staart)deling in het po en vo - een inventarisatie

Afstudeeronderzoek t.b.v. Masteropleiding
Science Education and Communication

ir. C. M. W. van Vliet
september 2013
Eindhoven School of Education
Masteropleiding Science Education and Communication

Begeleider
Dr. ir. G. Bruin-Muurling, ESoE

Inhoudsopgave

1 Voorwoord

Als afsluiting van de Masteropleiding Science Education and Communication (SEC) aan de Eindhoven School of Education (ESoE) wordt een afstudeeronderzoek verricht. Dit document doet daarvan verslag.

Tijdens mijn eerste stage in het onderwijs merkte ik dat veel leerlingen de bewerking delen (zonder rekenmachine) niet beheersten. De kennis en vaardigheid om een staartdeling te maken was niet aanwezig. '*Kunnen de leerlingen nog wel delen?' w*as dus al snel een opkomende gedachte. Andere docenten bevestigden dit beeld en mijn verwondering werd alleen maar groter.

In dezelfde periode kreeg de rekenvaardigheid van de leerlingen in ons onderwijs grote aandacht in de media (althans, ik ging deze aandacht bewuster ervaren).

Bovenstaande twee factoren hebben in grote mate bijgedragen aan de keuze van het afstudeeronderzoek. Het zou gaan over de rekenvaardigheid van de leerlingen (in het voortgezet onderwijs) in het algemeen en over het delen in het bijzonder.

In diverse media is de laatste jaren steeds meer de aandacht verschoven naar de rekentoetsen welke met ingang van het schooljaar 2013-2014 verplicht zijn voor alle leerlingen van het voortgezet onderwijs en dan ook onderdeel uitmaken van het examen voor zowel vmbo, havo en vwo.

Ik wil op deze plaats mijn begeleidster, Geeke Bruin-Muurling bedanken voor haar bereidheid om de begeleiding op zich te nemen. Ze heeft me waar nodig enthousiast gemaakt, niet alleen voor rekenvaardigheid of (staart)delingen, maar zeker ook in het denken over toetsen en normering. Ik zal deze interesse en enthousiasme zeker nog vaak gaan gebruiken in mijn interessante werk binnen het onderwijsveld.

2 Inleiding

Uit eigen observaties en die door vmbo, havo en vwo collega-docenten (zowel wiskunde als niet-wiskunde docenten) wordt het niet kunnen delen als een gemis ervaren. Dit gemis komt in het voortgezet onderwijs niet alleen tot uiting bij het vak wiskunde, maar ook bij vakken als aardrijkskunde, biologie, scheikunde, natuurkunde en biologie. Daarnaast zou dit gemis zich kunnen doen gelden buiten het schoolverband, maar ook bij vervolgopleidingen op mbo, hbo of universiteit.

Het genoemde gemis komt naar voren bij het schattend delen alsook bij het niet zonder rekenmachine kunnen maken van (zeer) eenvoudige delingen.

Problemen met betrekking tot het delen zouden weleens gerelateerd kunnen zijn aan problemen op het gebied van rekenvaardigheid. Dat dit tot uiting kan komen in functionele toepassingen in maatschappij en beroep lijkt evident.

In dit onderzoek wordt nader ingegaan op de stand van zaken op het gebied van het delen en de rekenvaardigheid. Hierbij wordt gekeken naar het (staart)delen zelf, waarbij de vraag gesteld kan worden of het gaat om een gebrek aan vaardigheid betreffende het delen zelf of een gebrek aan de gebruikte techniek (het staartdelen). In het volgende hoofdstuk zal de onderzoeksvraag geformuleerd worden alsmede een aantal afgeleide deelvragen. Tevens wordt daar aangegeven uit welke stappen het onderzoek zal bestaan.

Helaas heb ik door de beperkte omvang van het afstudeeronderzoek zowel bij de opzet als van de uitwerking van het onderzoek interessante vragen moeten laten liggen. Ik zal proberen om waar van toepassing deze grenzen aan te geven alsook aanvullende vragen te formuleren. Hiermee hoop ik anderen, maar ook mezelf op ideeën te brengen om in de toekomst nader onderzoek te verrichten.

3 Onderzoeksvraag

Hieronder wordt de hoofdvraag van het onderzoek gegeven. Voordat zinvolle conclusies mogelijk zijn, dienen de genoemde deelvragen beantwoord te worden.

3.1 Onderzoeksvragen

De centrale hoofdvraag van dit onderzoek kan als volgt worden geformuleerd.:

Kan de leerling in het voortgezet onderwijs (havo en vwo) (staart)delen en is deze vaardigheid noodzakelijk?

Om enige structuur aan te brengen in het onderzoek, zijn de volgende deelvragen als aanvulling op de hoofdvraag geformuleerd:

1. *Wat zeggen de referentieniveaus rekenen en hoe is het (staart)delen in de doorlopende leerlijnen geïmplementeerd?*
2. *Wat is de mening van en het verschil tussen de aanhangers van realistisch en traditioneel rekenen m.b.t. de (staart)deling.*
3. *Hoe staat het met de kennis en kunde van de leerlingen in het vo (havo / vwo)?*
4. *Wat is de mening van (wiskunde)docenten in het vo (havo / vwo) t.a.v. rekenvaardigheid en (staart)delingen?*

Bovenstaande deelvragen belichten de hoofdvraag ieder vanuit een andere invalshoek.

De eerste deelvraag gaat in op het curriculum. Hoe en waaruit zijn de referentiekaders voor rekenen ontstaan en hoe worden de referentieniveaus bereikt in de praktijk van het lesgeven in het po (primair onderwijs) en vo (voortgezet onderwijs). Deze vraag is zeer relevant, aangezien vanaf 2013/2014 de bij de referentieniveaus te ontwikkelen rekentoetsen verplicht onderdeel van het eindexamen van alle leerlingen in het vo zullen zijn.

Als tweede kijken we naar de didactische invalshoek. De afgelopen decennia hebben een hervorming van het reken/wiskundeonderwijs laten zien. Het gebruikelijke of *traditionele* pad werd verlaten en de weg werd ingeslagen naar een realistische manier van rekenen. Wat verstaan we onder deze begrippen, streven de aanhangers van de twee richtingen verschillende doelen na en hoe denken ze dit te bereiken?

Nadat de twee voorgaande deelvragen aan de orde zijn geweest en een context hebben neergezet, komen we met de derde deelvraag bij de kern van dit onderzoek. Rechtstreeks afgeleid van de hoofdvraag zullen we gaan onderzoeken in hoeverre de leerling in het vo kan (staart)delen. We zullen het vaardigheidsniveau onderzoeken door leerlingen een aantal deelopdrachten te laten maken. Wat buiten de scope van het onderzoek valt is een analyse van het proces hoe gekomen wordt tot het vaardigheidsniveau. Dit (aanvullende) onderzoek zou kunnen kijken naar de gebruikte lesmethoden en naar de praktijk van het lesgeven.

De vraag of een goede rekenvaardigheid wel of niet nodig is, wordt tenslotte bekeken vanuit de invalshoek van de reken/wiskunde-docent. Hoe zien zij de noodzaak van het hebben van de vaardigheid (staart)delen en in hoeverre is deze vaardigheid later van belang? Deze vraag is relevant omdat het de vakdocenten zullen zijn welke in het onderwijsleerproces met de leerling aan de slag gaan. Dat een meer gemotiveerde en motiverende docent meer voor elkaar kan krijgen in dit proces lijkt triviaal.

3.2 Opbouw onderzoek

Om een antwoord te vinden op de hiervoor geformuleerde hoofd- en deelvragen van het onderzoek, zal eerst een literatuuroriëntatie worden uitgevoerd en vervolgens een toets worden ontwikkeld welke zal worden voorgelegd aan leerlingen uit het vo.

De literatuurverkenning zal bestaan uit twee delen. Als eerste zal worden gekeken naar wat leerlingen uit zowel po als vo op het eind van hun opleiding moeten weten; wat zijn de einddoelen en kerndoelen m.b.t. rekenen en delen; wat zijn de referentieniveaus en hoe zijn ze ontstaan? Ook komt de vraag naar voren wat de doorlopende leerlijn m.b.t. het delen inhoudt.

Het tweede deel van de literatuurstudie zal bestaan uit het in kaart brengen van de twee belangrijke stromingen in de reken/wiskundewereld, nl. het traditioneel rekenen en het realistisch rekenen. Hoe is het een uit de ander ontstaan en wat zijn de gevolgen geweest voor de huidige stand van zaken op rekenwiskundegebied. Hierbij zal gekeken worden naar verschillende algoritmen om de bewerking delen uit te voeren.

Het belangrijkste deel van het onderzoek zal bestaan uit het onderzoek naar wat de leerlingen in het voortgezet onderwijs (havo en vwo) kunnen met betrekking tot het rekenen. Om deze vraag te beantwoorden is een toets met 10 uiteenlopende opgaven op het gebied van delen gemaakt en vervolgens is deze test door ruim 200 havo/vwo leerlingen gemaakt. Een niet onbelangrijke vraag was hoe de antwoorden op deze vragen te beoordelen. Hiervoor wordt de Rasch analyse gebruikt, een veelgebruikt IRT-model (Item Response Theorie) om niet alleen eindcijfers van/voor de leerlingen te produceren, maar ook kritische analyse van zowel antwoorden en resultaten van ondervraagden als van de vragen zelf mogelijk te maken.

Als laatste deel van het onderzoek zal ik een paar docenten wiskunde vragen naar hun mening over de rekenvaardigheid van leerlingen. Hoe kijken ze naar de actuele ontwikkelingen op dit gebied?

Op het einde van het onderzoek worden enkele conclusies getrokken waarmee de (deel)vragen worden beantwoord.

3.3 Verwachte uitkomsten van het onderzoek

Zowel op basis van mijn eigen waarnemingen als die van mijn collega-docenten, verwachtte ik dat de huidige kennis en kunde betreffende (staart)delen laag zou zijn. Gedurende het onderzoek zijn een aantal puzzelstukjes op hun plaats gevallen. Verderop in dit verslag worden resultaten en conclusies gegeven welke betrekking hebben op genoemde kennis en kunde.

4 Theoretisch kader en literatuurverkenning

In dit hoofdstuk zal ik ingaan op drie aspecten welke te maken hebben met de onderzoeksvraag. In de eerste paragraaf wordt ingegaan op doorlopende leerlijnen en referentieniveaus terwijl in de tweede paragraaf gekeken wordt naar realistisch en traditioneel rekenonderwijs. Tenslotte zal in de derde paragraaf wat uitgebreider gekeken worden naar methoden van delen.

4.1 Kerndoelen, referentieniveaus rekenen en doorlopende leerlijnen

Scholen in Nederland zijn vrij in het bepalen hoe zij onderwijs aan de leerlingen verzorgen. Zij moeten echter rekening houden met de kerndoelen welke door de overheid zijn opgesteld (OCW, 2006). Deze kerndoelen zijn in vrij algemene bewoordingen opgesteld. Zie als voorbeeld *Bijlage 1 – Kerndoelen po – wiskunde/rekenen*.

In het voortgezet onderwijs zijn er bestaande, door OCW bepaalde tussendoelen voor de onderbouw (OCW, 2010 - zie bijlage 2).

Het SLO (2012) heeft in 2012 concept-tussendoelen opgesteld voor wiskunde onderbouw, welke gebruikt worden bij de ontwikkeling van tussentijdse diagnostische toetsen. Naar verwachting worden deze tussendoelen in 2013 wettelijk vastgesteld.

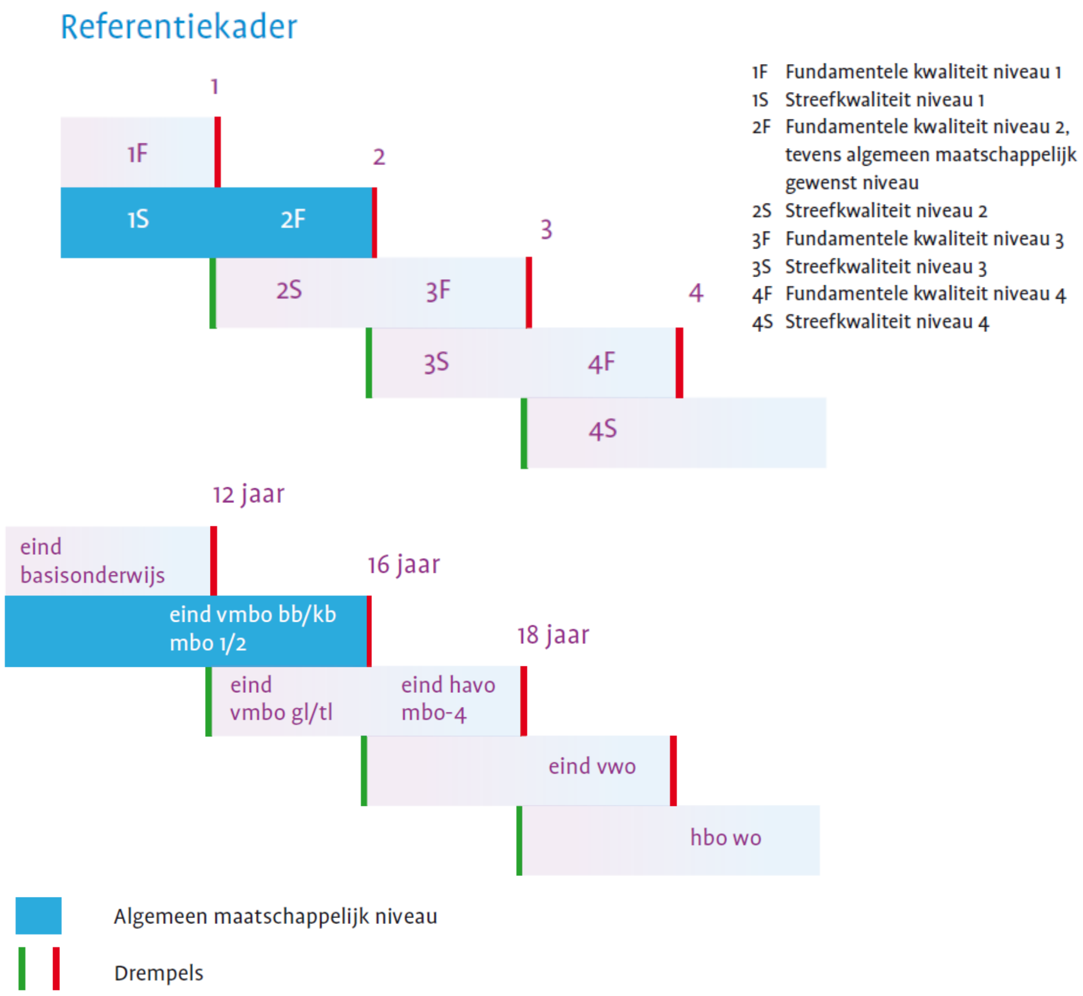
Vanwege zorgen over de kwaliteit van het taal- en rekenen/wiskundeonderwijs is in 2007 besloten een commissie in het leven te roepen, de ‘Expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen/wiskunde’. Dit zou uiteindelijk moeten leiden (en heeft ook geleid) tot een nadere formulering van de ‘doorlopende leerlijnen’ waarbij doorlopend slaat op wat binnen en tussen de diverse sectoren aan aansluiting wordt bewerkstelligd.

Centraal in deze problematiek is de ontwikkeling van referentieniveaus geweest met beschrijvingen over fundamentele en streefniveaus op verschillende momenten op verschillende niveaus. Een invulling en verscherping van kerndoelen, tussendoelen en eindtermen. Deze niveaus dienen iedereen binnen het onderwijsveld houvast en richting te geven. In *Figuur 1 - Overzicht referentieniveaus taal en rekenen* wordt een overzicht gegeven van het referentiekader taal en rekenen waarop de referentieniveaus de referentieniveaus rekenen/wiskunde zijn gebaseerd.

Als we ons beperken tot de (staart)deling op havo/vwo niveau zien we dat binnen het domein getallen (waartoe (staart)delen behoort), dat leerlingen op 3F niveau (het benodigde eindniveau voor de havo/vwo-leerling) in feite het gehele scala aan deelopdrachten moeten kunnen maken. Zowel contextloze als contextrijke opdrachten behoren tot de te toetsen vragen. Tevens komen ook opdrachten voor waarbij het delen als deel van een opdracht moet worden uitgevoerd. Hierbij dient de vaardigheid aanwezig te zijn om:

- de structuur en samenhang van getallen en getalrelaties te kunnen gebruiken in opgaven en tevens om
- berekeningen (delingen) zonder rekenmachine te kunnen uitvoeren met gehele getallen, breuken en decimale getallen.

Conclusie voor het (staart)delen is dat er zowel voor het po als voor onderbouw van het vo als voor de bovenbouw van het vo een structuur is opgezet waarbij steeds de eindtermen zijn bepaald. Op het einde van het vo zal door middel van een rekentoets het betreffende fundamentele kwaliteitsniveau worden getoetst (zie ook www.slo.nl).



Figuur 1 - Overzicht referentieniveaus taal en rekenen

4.2 Traditioneel en Realistisch Reken-wiskundeonderwijs

Apart van de vraag wat de leerling moet kennen en kunnen staat natuurlijk de vraag hoe tot een bepaald niveau van kennis en vaardigheid te komen. Als we deze vraag alleen proberen te beantwoorden door het in kaart brengen van (de) twee hoofdstromen in rekenland nl. het traditionele rekenen en het realistische rekenen, gaan we voorbij aan het ontstaan ervan.

In *Zonder verleden geen toekomst* geeft Ed de Moor (de Moor, 2009) een kort overzicht van de geschiedenis van de ontwikkeling van het rekenonderwijs in Nederland.

Zoals de naam doet vermoeden zijn we begonnen met – zoals we het nu noemen - het traditionele rekenonderwijs. Eind jaren 60 ontstaat met de oprichting van Wiskobas (Wiskunde op de Basisschool) een stroming welke begin jaren 70 leidt tot de oprichting van het Freudenthal Instituut. Het formele(re), abstracte en algoritmische rekenonderwijs werd radicaal afgezworen (Visser, 2008) en hiervoor in de plaats kwam vrij snel een vorm van onderwijs waarbij rekenen wordt aangeleerd met behulp van een inzichtelijke leerproces waarbij gevarieerde contexten een grote rol spelen. Kinderen construeren zelf – al dan niet met schema's - oplossingen. Hierbij zijn meerdere oplossingsstrategieën mogelijk en kinderen wordt aangemoedigd deze ook te gebruiken. Ze gaan zelf op zoek naar antwoorden om zodoende ook inzicht te verwerven. Het sluit aan bij de leefwereld van de kinderen. De aldus ontstane stroming wordt aangeduid als het Realistisch Rekenen & Wiskunde ofwel het RME (Realistic Mathematics Education) en Freudenthal wordt beschouwd als de grondlegger van de stroming, alhoewel de eerste aanduiding 'realistisch' kwam van Treffers (1987).

De manier waarop kinderen rekenen/wiskunde leren en hoe rekenen/wiskunde geleerd zou moeten worden volgens het RME / Realistisch Rekenen worden hieronder weergegeven aan de hand van zes uitgangspunten (van den Heuvel Panhuizen & Weijers, 2005) – eigen vertaling van de door de schrijvers gehanteerde termen:

1. *Activiteitsprincipe*
   Wiskunde moet je doen. Wiskunde wordt gezien als een activiteit waarbij de leerling zelf inzicht ontwikkelt door het doen. De vaardigheid wordt gedurende het proces zelf ontwikkeld.
2. *Realiteitsprincipe*
   Wiskundige concepten worden ontwikkeld aan de hand van contexten welke voorkomen in de belevingswereld van de leerling.
3. *Niveauprincipe*
   Kenmerkend voor de RME/aanpak is een graduele verschuiving in de tijd van een informele naar een formele aanpak. Na context-gebaseerde niveaus wordt geleidelijk via een langlopende leerlijn overgegaan tot formele(re) niveaus van wiskunde.
4. *Verwevenheidsprincipe*
   Binnen wiskunde en rekenen kunnen domeinen worden onderscheiden, maar zeker niet worden gescheiden; er is sprake van verwevenheid. Bij praktische problemen zal een (gelijktijdig) beroep gedaan worden op kennis en inzicht van meerdere delen van wiskunde/rekenen. Zowel relaties tussen domeinen als getallen, verhoudingen, verbanden en meten/meetkunde komen voor, maar ook binnen een domein kom je verstrengeling tegen zoals tussen b.v. getalsgevoel, hoofdrekenen, schattend rekenen.
5. *Interactieprincipe*
   Wiskunde wordt mede geleerd door interactie met anderen. Gedurende het proces van het leren ontdekken van wiskunde wordt de discussie met de medeleerling belangrijk om tot een beter begrip te komen.
6. *Begeleidingsprincipe*
   Wiskundemethoden en docenten dienen een leeromgeving te creëren waarbij de leerling begeleid wordt om wiskundeconcepten theorieën en -concepten zelf te (her)ontdekken. Hierdoor zal een dieper begrip bereikt worden. Dit principe wordt vaak aangeduid als '*Guided Reinvention'* of '*geleid heruitvinden'.*

De twee genoemde stromingen (traditioneel en realistisch rekenen) vergelijk ik zelf met het verschil tussen 'instrumental' (snap ik wat ik doe) en 'relational understanding' (snap ik hoe en waarom ik het doe) van Skemp (Skemp, 1976).

Traditioneel rekenen wordt gezien als traditioneel rekenen, maar ook als benaming van de stroming BON (Beter Onderwijs Nederland) – J. van de Craats, welke een alternatief zegt te bieden voor RME.

Ik zal proberen om hieronder enkele – algemene - verschillen tussen het traditioneel en realistisch rekenen te geven om in de volgende paragraaf te gaan kijken naar verschillen voor wat betreft het delen.

Vergelijking traditioneel vs. realistisch rekenen

Bij traditioneel rekenen wordt meer dan bij realistisch rekenen gebruik gemaakt van standaardmethoden of standaardalgoritmen. Zo heeft van de Craats het in zijn zwartboek over het rekenonderwijs (Van de Craats, 2008) het over “Opa’s Rekenrecepten”. Hiermee zouden alle elementaire rekenbewerkingen gegeven worden op enkele bladzijden (zie voor iets uitgebreidere versie Van de Craats & Bosch, 2007). Het Realistisch Rekenen gaat meer uit van vaardigheid door inzicht (in plaats van inzicht door vaardigheid). Als in het onderwijsleerproces kinderen eerst getalsinzicht krijgen, dan zullen bewerkingen met getallen ook eenvoudiger verlopen.

Een tweede verschil zien we als we kijken naar de plaats van een cijfer in getallen. Bij traditionele methoden van rekenen wordt vaak een standaardalgoritme gebruikt waarbij de cijfers vaak van rechts naar links worden gebruikt. Als we kijken naar het zgn. kolomsgewijs

oud	**nieuw**
704	10 × 704 = 7040
23 x	10 × 704 = 7040
2112	3 × 704 = 2112 +
1408	16192
16192	
	verkorte versie
	20 × 704 = 14080
	3 × 704 = 2112 +
	16192

Figuur 2: Conventioneel cijferen (oud) en kolomsgewijs rekenen (nieuw) (bron: Gravemeijer, 2007)

rekenen (zie b.v. Treffers, 1987-2 of Gravemeijer, 2007) wordt meer gekeken naar de betekenis van de plaats van de cijfers in de getallen. Het lijkt er dan op dat er van links naar rechts gerekend wordt. In figuur 2 staat van beide een voorbeeld.
Een derde verschil tussen de twee stromen betreffende rekenen wordt gevormd door oplossingsstrategieën. Bij het traditioneel rekenen wordt zonder al te veel omwegen gekeken naar het algoritme voor de betreffende bewerking. Bij het realistische rekenen worden, afhankelijk van de context en van de gebruikte getallen, verschillende oplossingsstrategieën gebruikt. Aanhangers van het traditioneel rekenen menen dat sommige leerlingen door de verschillende manieren van oplossen door de bomen het bos niet meer zullen zien. Toch is de situatie en verklaring iets genuanceerder. Gravemeijer (en anderen) gaat in enkele publicaties (Gravemeijer, 2005, 2007; 2010; Gravemeijer, Bruin-Muurling & van Wijck, 2009)

nader in op de vraag hoe (wiskundige) problemen worden opgelost en hoe hierbij (oplossings)strategieën worden gebruikt.
Bij het aanleren van wiskundige begrippen en concepten wordt vaak een fenomenologische aanpak gehanteerd waarbij wordt aangesloten op bestaande – vaak informele – kennis. Een brede basis en inbedding wordt gelegd door gebruik te maken van verschillende strategieën. Bij het uitwerken van vraagstukken is er sprake van horizontaal en verticaal mathematiseren ofwel het maken van een vertaalslag naar een wiskundige formulering resp. het oplossen van het wiskundige probleem (met daarbij behorende wiskundige bewerkingen). Bij deze laatste activiteit zien we vaak dat steeds andere oplossingsstrategieën worden gebruikt welke soms behoren bij een wiskundige niveauverhoging.

Als we de verschillen tussen traditioneel en realistisch rekenen laten voor wat ze zijn en ons de vraag stellen welke methode de betere resultaten bereikt dan zien we – zoals verwacht – eenzelfde situatie. Voor- en tegenstanders kijken anders aan tegen de resultaten van (inter)nationale (reken)onderzoeken zoals TIMMS (*Trends* in International Mathematics and Science Study, onderzoek dat kijkt naar trends en slechts deel van de leerlingen in po en vo betreft), PISA (Programme for International Student Assessment, een groot internationaal vergelijkend onderzoek onder 15 jarigen op het gebied van taal, wiskunde en natuurwetenschappen) en PPON (Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau, een project van het cito met als doel om resultaten van scholen te beoordelen en indicatief zijn voor verdere onderzoeken).

Volgens Gravemeijer (2007) scoort Nederland bij TIMMS onveranderlijk goed, alhoewel hij aangeeft dat vakdidactici opmerken dat er feitelijk alleen elementaire rekenvaardigheden worden getoetst. Van de Craats geeft op (of volgens) de website van Beter Onderwijs Nederland (BON, een vereniging welke traditioneel en goed verzorgd onderwijs nastreeft en op de lijn van het Traditioneel Rekenonderwijs zit) een stevige repliek op de goede resultaten van Nederland bij TIMMS. Ook bij PISA merkt Gravemeijer (Gravemeijer, 2007) op dat Nederland hoog scoort, maar ook hier een 'maar'. De vragen zouden lijken op opgaven uit Nederlandse schoolboeken.

Als we kijken naar PPON ziet Gravemeijer (2007) gelijkenis met het Nederlandse onderwijs. Hoofdrekenen, schattend rekenen en getalsrelaties zijn hier belangrijk en we zien dan ook dat de scores op deze gebieden vooruit gaan (tussen 1987 en 2004). Ook wordt er een achteruitgang geconstateerd bij de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Naast een blijkbaar aantal goede resultaten geeft van de Craats kritisch commentaar en besluit 18 pagina's over het PPON-onderzoek (Van de Craats, 2008) met

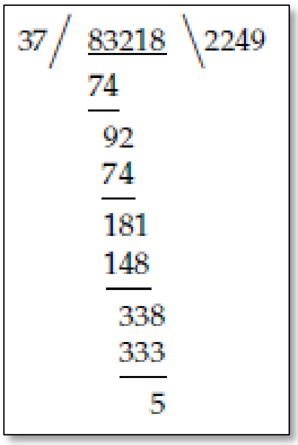
> "Het eens zo succesvolle rekenonderwijs op de basisschool is ongemerkt aan de stoeprand gezet. Als gevolg hiervan is de rekenvaardigheid van de Nederlandse jeugd dramatisch gekelderd. De kerndoelen van het basisonderwijs worden niet meer gehaald. Daan en Sanne kunnen niet meer rekenen."

4.3 (Staart)delen in het traditioneel en realistisch rekenonderwijs

De twee bekendste vormen van delen die horen bij het traditioneel en realistisch rekenen, zijn resp. de staartdeling en het kolomsgewijs delen (ook wel hapmethode genoemd). Ik zal beide methoden hieronder laten zien.

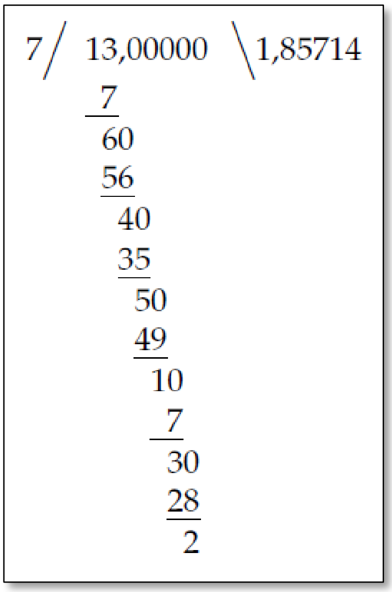
De staartdeling

De volgende twee figuren komen uit “Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen” (Van de Craats, 2008).



Figuur 3
Delen met rest

De deling laat zien dat $83218 : 37 = 2249\ rest\ 5$. Als de rest gelijk aan 0 is, zeggen we dat de deling ‘opgaat’ (het getal 83218 het het deeltal; het getal 37 heet de deler en het getal 2249 heet het quotiënt en het getal 5 heet de rest).



Figuur 4
Voortgezette staartdeling

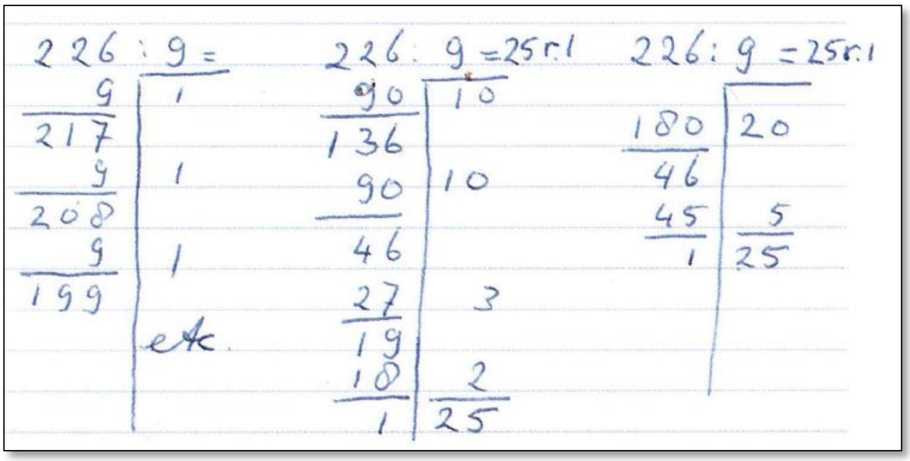
De deling gaat hier niet op $13 : 7 = 1\ rest\ 6$ (), maar je kunt het quotiënt met decimalen benaderen zo nauwkeurig als je wilt. Hier is dit gedaan tot op 5 decimalen nauwkeurig.

Als het de deler zelf een decimaal getal is, vermenigvuldig je zowel deeltal als deler met een macht van 10.

Op deze wijze kun je b.v. ook breuken omzetten in decimale getallen ($\frac{13}{7} = 1{,}85714$).

Kolomsgewijs delen

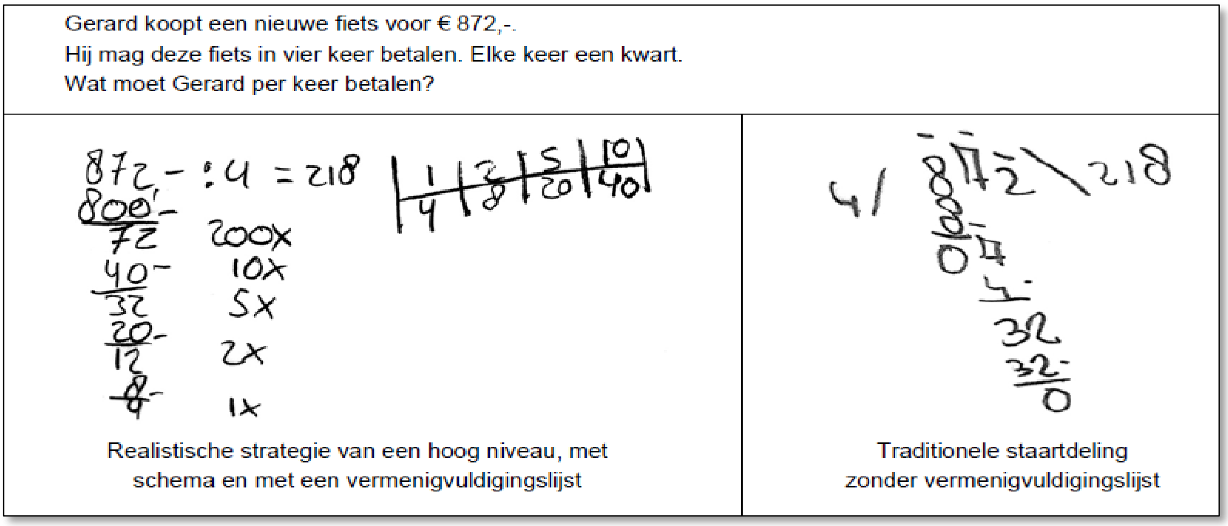
Als we kijken naar Realistisch Rekenen en de bewerking delen, zien we in zowel de methoden voor het po als in de instructieboeken voor de pabo meerdere manieren. Toch hebben ze veel gemeen, nl. het herhaald aftrekken. Vaak wordt de (verzamel)naam ‘hapmethode’ gebruikt om aan te geven dat er steeds happen uit het deeltal worden genomen (in wezen is de staartdeling ook een vorm van herhaald aftrekken). Deze hapmethode kan meer en minder gedetailleerd worden uitgevoerd. Zie het volgende voorbeeld:



Figuur 5 - Drie niveaus van staartdelen (bron: Ale & Van Schaik (2011)

Duidelijk te zien in het eerste voorbeeld is dat we iedere cyclus 9 kunnen aftrekken van het oorspronkelijke getal van 226. Op deze wijze wordt het herhaald aftrekken letterlijk toegepast. Uiteindelijk kun je dit 25 maal doen. Er zal dan ‘1’ overblijven, zodat de uitkomst van 25 rest 1 wordt bereikt.

De tweede en derde manier zijn duidelijker efficiënter; de ‘happen’ worden steeds groter en dit vertaalt zich in een kortere deling en de laatste uitwerking is dan ook de meest efficiënte. De methode komt bijna overeen met het staartdelen, alleen wordt een extra 0 opgeschreven. Hiervoor wordt wel meer een beroep gedaan op het kunnen hanteren van de vermenigvuldigingstafels (hier die van 9), welke vaak ook nog apart worden opgeschreven. Het volgende voorbeeld illustreert dit (met een vergelijking met de staartdeling).



Figuur 6 - voorbeelden van uitwerkingen van leerlingen, gecodeerd als een realistische strategie (links) en als een traditionele staartdeling (rechts) (Bron: Van Putten, 2006)

Opgemerkt wordt dat naast de staartdeling en de hapmethode zeker binnen het realistisch rekenonderwijs nog verschillende oplossingsstrategieën aangeboden worden voor de bewerking delen. Voor een overzicht verwijs ik naar de reactie van een aantal deskundigen op dit gebied (Van Putten, 2008; Van Putten & Hickendorff, 2006). In deze publicaties wordt ook een verklaring gegeven voor de achteruitgang van de prestaties op het gebied van deelsommen, zowel bij de traditionele staartdeling als bij de realistische oplossingsstrategieën. Volledigheidshalve wordt opgemerkt dat er over laatstgenoemd (onderwijskundig) onderzoek hier en daar nog weleens kritische vragen worden gesteld.

5 Opzet en uitvoering van het onderzoek

De onderzoeksvraag zoals gesteld in paragraaf 4.1 gaat over de vraag of de leerling in het voortgezet onderwijs (havo en vwo) kan (staart)delen en of deze vaardigheid noodzakelijk is.

Het onderzoek omvat een test met een aantal opgaven – test-items – die zijn voorgelegd aan een groep leerlingen in het vo. In dit hoofdstuk worden achtereenvolgens de volgende onderdelen besproken:

- Het ontwerp van de voor dit onderzoek gemaakte test-items of vragen (het onderzoeksinstrument) over de vaardigheden van de leerlingen betreffende delen.
- Bij welke leerlingen en hoe is de test afgenomen?
- Beschrijving van de verwerking van de gegevens (m.b.v. Rasch analyse).
- Als laatste onderdeel zal er een korte enquête plaatsvinden naar de mening van een aantal wiskundedocenten.

5.1 Ontwerp test-items

Voor dit onderzoek is een toets gemaakt met verschillende opgaven die variëren in moeilijkheidsgraad en die ieder een ander aspect van het delen bevatten. In deze paragraaf worden de verschillende opgaven die aan de leerlingen zijn voorgelegd beschreven.

De score die de leerlingen halen voor de toets dient een goede afspiegeling te zijn van het vaardigheidsniveau dat we in dit onderzoek willen meten. In paragraaf 6.3 zal worden uiteengezet hoe deze score tot stand komt.

In de onderstaande tabel staan de opgaven met oplossing vermeld en waar nodig een opmerking over het specifieke of de moeilijkheid bij de betreffende opgave. Opgemerkt wordt dat bij de verwerking van de antwoorden alleen zal worden uitgegaan van de eindoplossing van de opgaven. In sommige gevallen zal echter gekeken (kunnen) worden naar de manier waarop de antwoorden tot stand zijn gekomen. Zie hiervoor enkele voorbeelden in paragraaf 7.1. Bij de eerste vier opgaven zal worden vermeld dat – waar van toepassing – delen met rest wordt bedoeld. Daarna een opmerking dat van het antwoord alleen de eerste drie decimalen moeten worden gegeven met een duidelijk voorbeeld erbij (zie *Bijlage C – Vragenlijst Delingen*)

	Opgave	Oplossing	Opmerking
A	$448 : 7$	$64\ (rest\ 0)$	Eenvoudige opgave die met staartdeling of kolomsgewijs delen (of zelfs uit hoofd) opgelost kan worden. Bij nadere analyse kan gekeken worden naar efficiëntie van het kolomsgewijs delen (in dien deze strategie is gebruikt; geldt ook voor de andere opgaven).
B	$3983 : 17$	$234\ rest\ 5$	*(met decimalen – afgerond 234,29412)* In een relatief eenvoudig voorbeeld wordt gekeken of de leerling het begrip ‘delen met rest’ beheerst.
C	$821337 : 47$	$17475\ rest\ 12$	*(afgerond 17475,25532)* Getoetst wordt of het delen met rest ook in een iets lastiger voorbeeld kan worden toegepast..
D	$250000000 : 625$	400000	In deze opgave wordt het omgaan met ‘nullen’ getoetst.

	Opgave	Oplossing	Opmerking
E	$1155 : 44$	26,25	Hier wordt de eerste opgave met decimale uitkomst gegeven zonder dat decimalen moeten worden weggelaten.
F	$1234{,}75 : 15$	82,316	*(preciezer en afgerond: 82,3166667)* Het deeltal in deze opgave bevat decimalen en het antwoord heeft een decimale uitkomst. Wordt het decimaalteken op de juiste plaats gezet? Worden er drie decimalen *onafgerond* (zoals gevraagd) gegeven?
G	$35604{,}2 : 25{,}3$	1407,280	Opgave waarbij deeltal en deler ieder één decimaal hebben. Derde (en laatste) decimaal dient gegeven te worden.
H	$2458{,}7 : 1{,}214$	2025,288	*(2025,2883031)* In deze opgave heeft de deler meer decimalen dan het deeltal (wordt er eerst met 1000 vermenigvuldigd?).
I	$7438657234 : 1000$	7438657,234	In deze opgave wordt meer gekeken naar het begrip van de machten van 10 en hoe mee wordt omgegaan.
J	$345456 : 0{,}01$	34545600	Zelfde soort opgave als vorige opgave, maar deler kleiner dan 1.

5.2 Afname test

De test is afgenomen bij 222 leerlingen in 9 (wiskunde)groepen van het Mollerlyceum te Bergen op Zoom. Het Mollerlyceum is een school voor vmbo (TL), havo en vwo. De test is afgenomen bij leerlingen van havo en vwo volgens onderstaande tabel.

In bijlage C staat de uiteindelijke test die is voorgelegd aan de leerlingen. De leerlingen kregen geen kladpapier en in de instructie werd vermeld dat de ruimte ook benut mocht worden voor het maken van berekeningen. Volgens de docenten (die de test afnemen) kregen de meeste leerlingen ongeveer 25 minuten tijd, maar was dat voor de meesten te weinig.

leerjaar	havo / vwo	wiskunde	aantal leerlingen
1	Havo		22
2	Havo		31
3	Havo		24
4	Havo	A	19 (28[1])
4	Havo	B	17
1	Vwo		29
3	Vwo		26
4	Vwo	A	14 (18[1])
5	Vwo	B	26

[1)] Leerlingen waarbij overduidelijk bleek dat er geen serieuze poging is gedaan voor het invullen van de test, zijn buiten beschouwing gelaten. Bijv. alles goed, maar geen berekeningen (dus rekenmachine?) of waar gewoon op stond: 'geen zin'. Alleen gebeurd in vierde klassen.

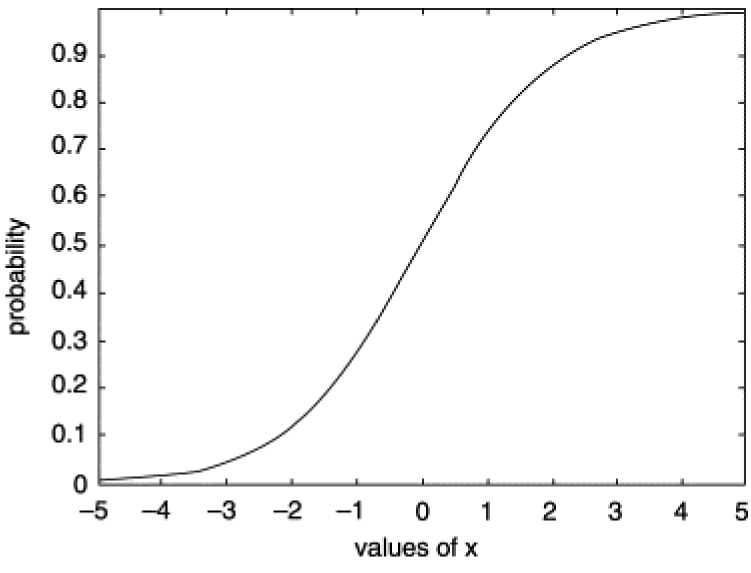
5.3 Verwerking antwoordformulieren

Als we de vaardigheid van een leerling willen meten ten aanzien van rekenen, willen we deze vaardigheid uitdrukken als een getal op een schaal. De verwerking van de gegevens is gebeurd met behulp van Rasch analyse. De Rasch analyse is gebaseerd op de Item Response Theorie, een modern alternatief voor de klassieke testtheorie. Waar binnen de klassieke testtheorie de nadruk ligt op begrippen als betrouwbaarheid, gemiddelde en standaardafwijking, ligt de focus bij modellen gebaseerd op de IRT anders.

Er wordt gezocht naar de mate waarin een testpersoon een bepaalde vaardigheid bezit. De vaardigheid is aanwezig, maar kan niet direct bepaald worden (latente vaardigheid) en wordt dan ook indirect gemeten door het beantwoorden van een aantal vragen (test items). Deze beantwoording wordt uiteindelijk vertaald in een zgn. Rasch-score, een kwantitatieve aanduiding als juiste afspiegeling van de mate waarin de persoon de latente vaardigheid bezit.

Bij de IRT-methoden staat niet alleen de totale score op de verzameling vragen centraal, maar zeker ook een beoordeling van de vragen zelf (‘item response’). Hiermee hebben we eigenlijk twee zaken geïdentificeerd waarin we geïnteresseerd zijn, nl. de vaardigheid van de persoon en de moeilijkheid van het item.

De kans op het goed beantwoorden van een item (we gaan even uit van hetzij goed, hetzij fout beantwoorden van een vraag) hangt nu enerzijds af van de moeilijkheid van het item en anderzijds van de vaardigheid van de persoon (als voorbeeld, zie Figuur 7). In deze figuur lees je op de verticale as de kans af dat een bepaalde vraag goed wordt beantwoord bij een gegeven vaardigheid op de horizontale as.



Figuur 7 Item Response Function

In de grafiek is hier de vaardigheid x op de horizontale as weergegeven met als nulpunt die vaardigheid waarbij de kans op het goed beantwoorden van een vraag gelijk is aan 0.5. Deze zgn. Item Response Function (uit Figuur 7) is de weergave van de functie welke behoort bij een speciaal IRT-model, nl. het Rasch-model.

Het bijzondere aan het Rasch model is dat het een zeer veel gebruikt IRT-model is welke heel veel aandacht heeft gekregen in de literatuur. Het model is door de Deense wiskundige en statisticus Georg Rasch (1901-1980) ontwikkeld en in 1960 gepubliceerd (Rasch, 1960).

De Rasch analyse heeft zich ruimschoots bewezen (wordt ook gebruikt bij de eerder genoemde TIMMS, PPON en PISA onderzoeken) bij het onderzoek naar wiskundige vaardigheden. Het grote voordeel van Rasch-analyse is dat je niet alleen kijkt naar de scores (en foutenmarge) van de leerlingen op vragen, maar ook de vragen gaat beoordelen op zowel moeilijkheidsgraad als geschiktheid bij het meten van de eerder genoemde latente vaardigheid. De Rasch scores worden uitgedrukt op een intervalschaal in zgn. logits. Voor een nadere definitie en uitleg van de gebruikte techniek en begrippen verwijs ik naar de literatuur (Bond & Fox, 2010; Liu & Boone, 2006, Boone & Scantlebury, 2006) en voor een voorbeeld van een toepassing m.b.v. Rasch analyse naar Bruin-Muurling (2010).

In de analyse gebruiken we de bij het boek van Bond & Fox bijgesloten en iets aangepaste versie van een softwarepakket, WINSTEPS van Linacre (Linacre, 2006).

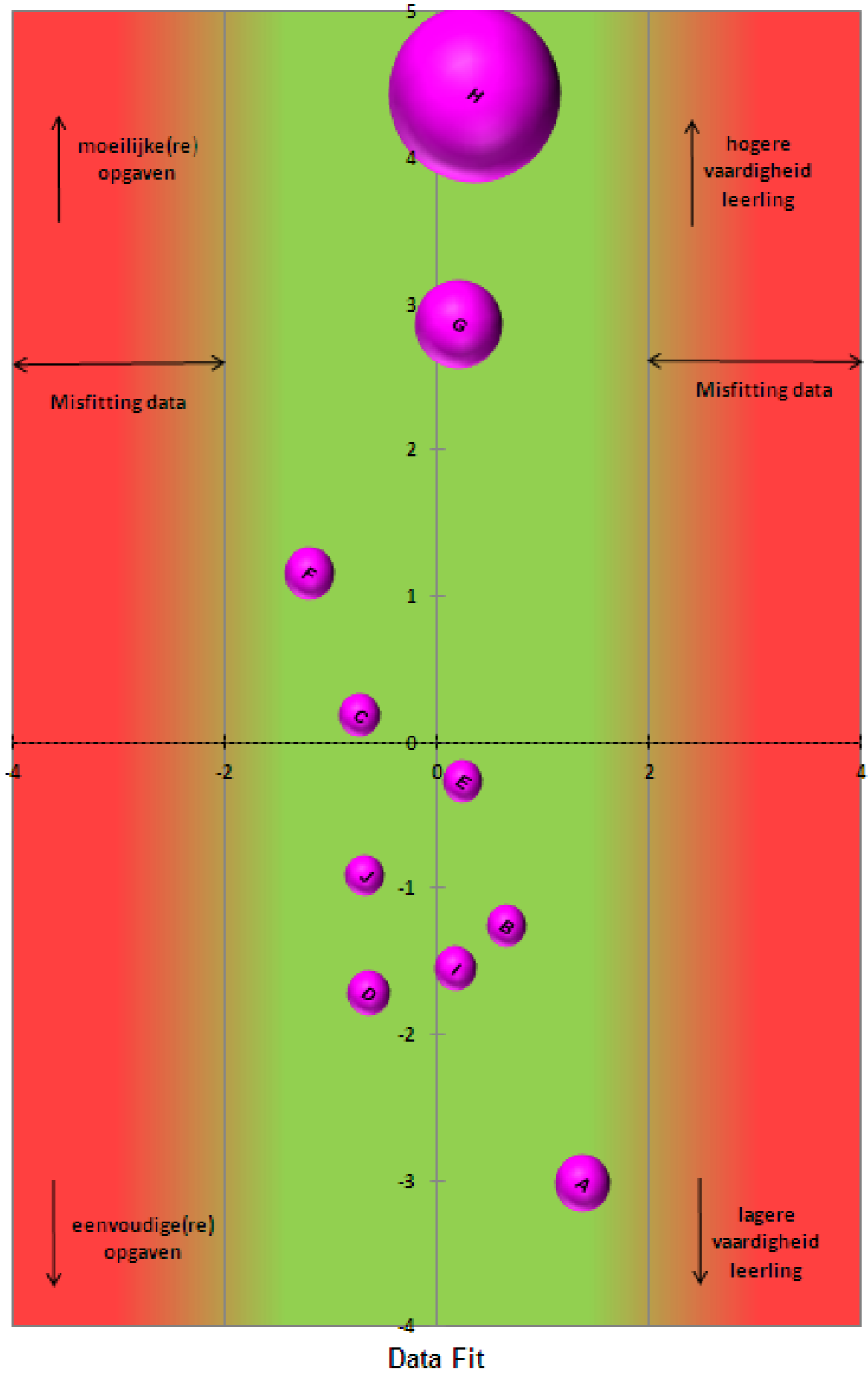
Een eerste stap in de verwerking van de gegevens is het coderen van de items (vragen), leerlingen en de resultaten. De items zijn gecodeerd met een letter (A…J, zoals ook gebruikt in itemtabel in paragraaf 5.1) en de leerlingen zijn gecodeerd met een volgnummer. In het label van de personen staat een aanduiding waarmee we kunnen zien uit welke klas de leerling afkomstig is (bv 4HA staat voor 4 havo wiskunde A).

Voor het doel van de analyse is gekozen voor een goed/fout codering van de antwoorden op de items waarmee een dichotomisch model ontstaat. De beoordeling of een antwoord goed of fout is, is niet altijd even scherp te maken. Zo zijn bij de opgaven *delen met rest* (goede) antwoorden met decimalen fout gerekend; maar een antwoord met rest 0 is wel goedgerekend. Bij de vragen waarbij de eerste drie decimalen werden gevraagd, is een antwoord met meer (of minder) decimalen fout gerekend. Ook afgeronde antwoorden zijn fout gerekend.

Bij de start van het gebruik van de software kijken we in de analyse als eerste naar de kwaliteit van de vragen. Zijn de vragen goed (genoeg) voor de gegeven groep personen (leerlingen). Bij de beoordeling van de kwaliteit gaat het enerzijds om de vraag of de items geschikt zijn om de (latente) vaardigheid te bepalen. Indien dit het geval is wordt dit zichtbaar op de zgn. pathway (zie *figuur 8 – Geschiktheid opgaven* op de volgende pagina). Doordat de items gepositioneerd zijn langs de verticale as en hier dichtbij blijven, ligt een goed 'fit' van de data voor de hand. Deze fit valt af te lezen op de horizontale as (fit statistics) en zolang de waarde blijft binnen de groene zone, hebben de items een goede fit.

We zien de vragen mooi verdeeld over de verticale as; van -3,0 tot +4,5 logits. Ze liggen op een mooie lijn van eenvoudig tot vrij moeilijk (voor de onderzochte groep). Wat wel opvalt is dat naarmate de items moeilijker zijn (vgl. opgave H), er sprake is van een relatieve grote standard error (gegeven door de diameter van de cirkels).

In het volgende hoofdstuk zullen we enkele analyses maken en conclusies trekken met betrekking tot de uitgevoerde testen en verwerking met behulp van de Rasch methode.



Figuur 8 - Geschiktheid Opgaven

5.4 Docentenenquêtes

Als laatste onderdeel van dit onderzoek zijn een paar docenten geïnterviewd .Er is hiervoor gekozen om een iets completer inzicht te krijgen in een belangrijke component van het gehele rekenonderwijs. Er hebben enkele vrij uitgebreide gesprekken plaatsgevonden met een sectieleider wiskunde en enkele wiskundedocenten uit boven- en onderbouw van de school waar ook de toetsen bij de leerlingen zijn afgenomen. Interessante gesprekken waarbij het zeker relevant geweest zou zijn om systematisch te kijken naar de meningen en opvattingen van niet-wiskundedocenten. Helaas was dit door de beperkte omvang van het onderzoek niet mogelijk.

De interviews zijn mondeling afgenomen en bestonden grotendeels uit open vragen, waarbij doorgevraagd is afhankelijk van de antwoorden. De vragen zijn zo neutraal mogelijk gesteld.

De vragen welke zijn gesteld hadden betrekking op de volgende aspecten:

- Algemene vragen over achtergrond van de docent (opleiding, les-ervaring e.d.)
- Vragen over de organisatie van het rekenonderwijs op school
- Kennis van referentieniveaus en evt. gebruik van deze niveaus in de lessen
- Mening van de docenten over de reken/wiskundemethoden welke worden gebruikt / waar ervaring mee is
- Kennis van traditioneel en realistisch rekenen (en delen) en de discussie in de vakliteratuur
- Mening van docenten in hoeverre leerlingen een goede rekenvaardigheid moeten bezitten en waarom.
- Mening van docenten in hoeverre leerlingen moeten kunnen (staart)delen en waarom.

6 Resultaten

Op basis van het uitgevoerde onderzoek zoals besproken in het vorige hoofdstuk worden in het eerste deel van dit hoofdstuk enkele conclusies getrokken welke direct gerelateerd zijn aan de testafname en de Rasch-analyse. De in de inleiding genoemde afbakening van het onderzoek is de reden dat hier geen verdere systematische bestudering heeft plaatsgevonden van de verzamelde gegevens. Deze nadere analyse van de gegevens (m.b.v. de Rasch analyse en de gebruikte analyse) is interessant en dit onderzoek krijgt mogelijk een vervolg.

In het tweede deel van het hoofdstuk worden de oorspronkelijke onderzoeksvragen herhaald en wordt getracht te kijken wat het onderzoek aan antwoorden heeft opgeleverd.

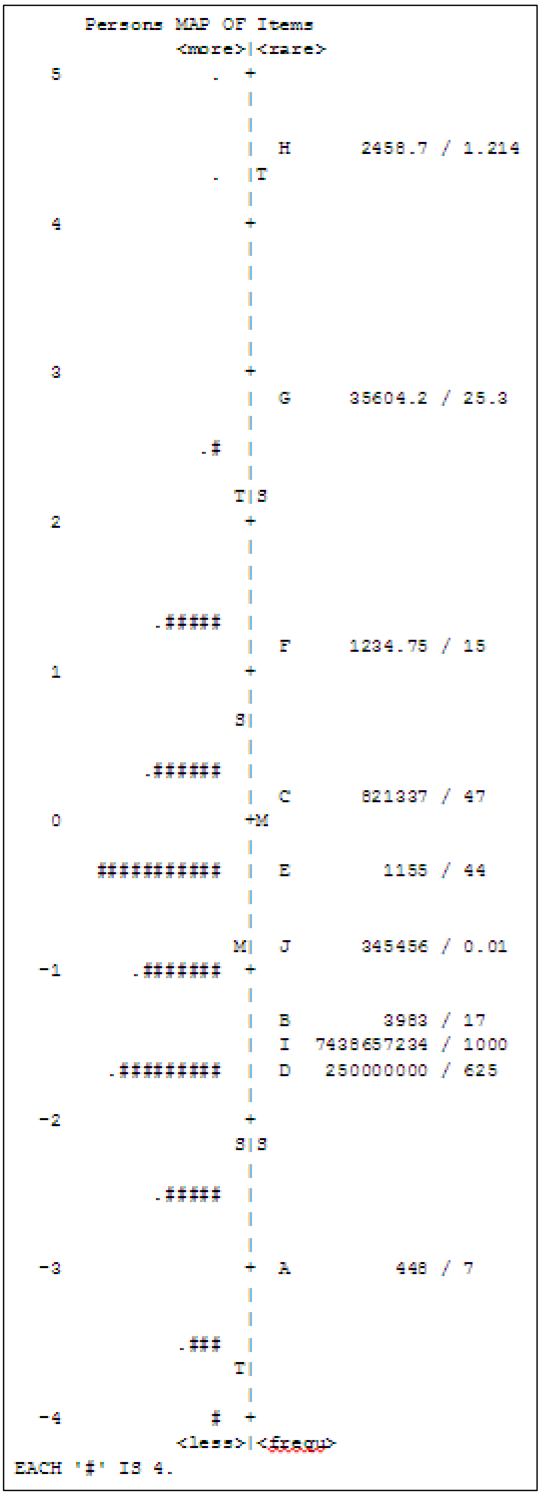
6.1 Resultaten Rasch analyse

Nadat een eerste analyse uitwijst dat de items de te meten vaardigheid op een goede manier kunnen meten (oplopende moeilijkheidsgraad en een goed model fit), dienen we naar de combinatie van vragen en leerlingen te gaan kijken. Dit doen we met behulp van een zgn. Item-Person map. In figuur 9 op de volgende pagina, zien we de Item-Person map voor het uitgevoerde onderzoek.

Wat we kunnen concluderen uit deze figuur is dat de vragen goed passen bij de leerlingen waarvoor de test is gemaakt (onderscheidend vermogen van de toets is goed doordat de resultaten van de leerlingen een goede spreiding vertonen op de schaal van de vaardigheid welke wordt gemeten en zoals we in het voorgaande hoofdstuk zagen was er een goede geschiktheid van de opgaven).

We zien in deze figuur de opgaven aan de rechterzijde op een intervalschaal van makkelijk (beneden) naar moeilijk (boven) en tegelijkertijd de leerlingen (ook op een intervalschaal) met een lage vaardigheid (beneden) tot een hoge vaardigheid (boven). In de figuur stelt ieder '#'-teken vier leerlingen voor en ieder '.'-teken één leerling, dus zijn er b.v. 17 leerlingen die slechter scoren dan -3 logits, terwijl er geen opgave is met een moeilijkheidsgraad kleiner dan -3 logits.

Indien een opgave in de figuur op gelijke hoogte staat met een leerling, betekent dit dat de leerling een 50% kans heeft om de opgave goed te maken. Staat een opgave hoger dan de leerling, dan is er een kans van minder dan 50% dat de leerling de opdracht goed maakt en staat een opdracht lager dan de leerling, dan is er een kans van meer dan 50% dat de opgave goed wordt gemaakt (moeilijkere opgave).

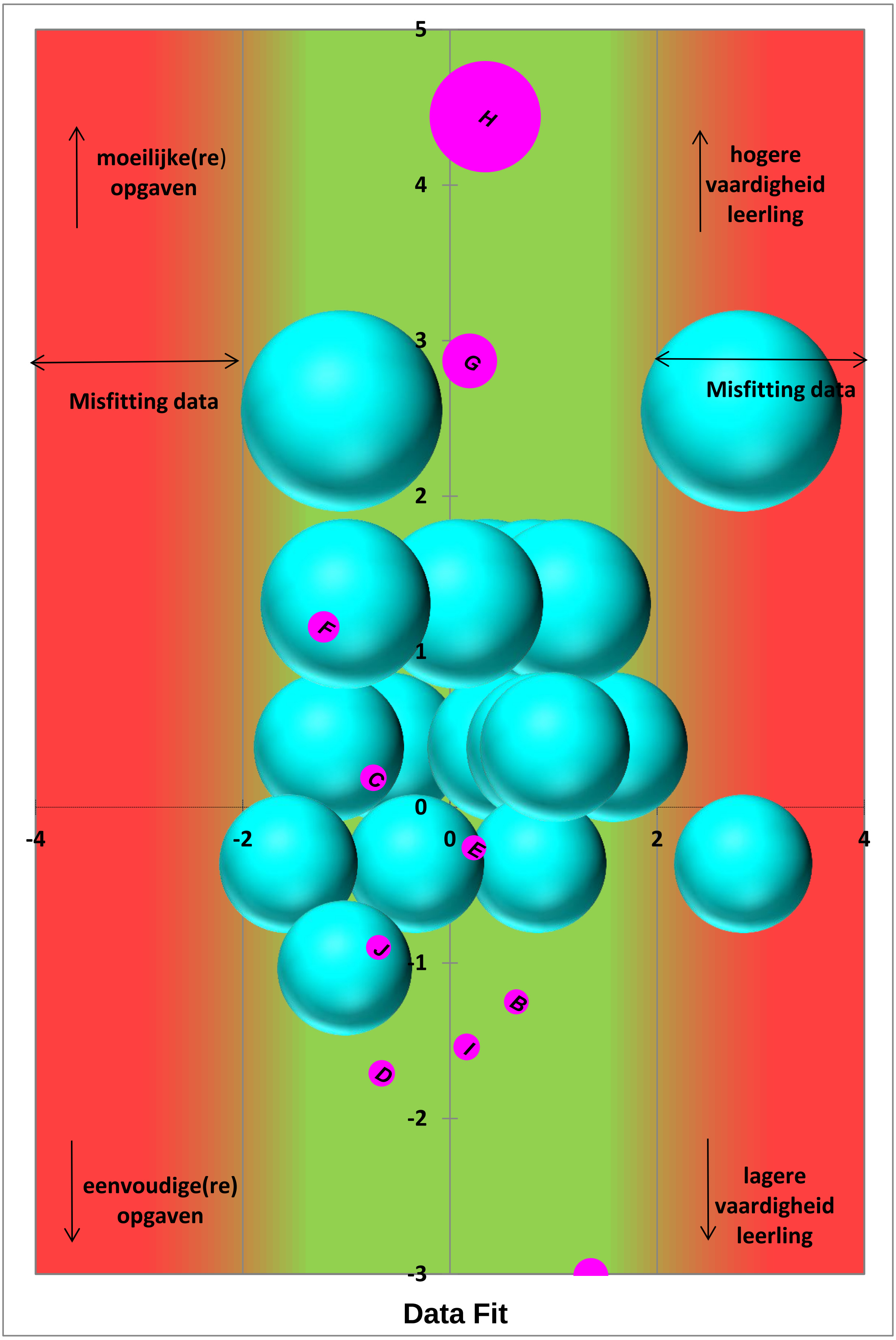


Figuur 9 – Wright map (Item-Person map)

In figuur 10 zien we de item pathway, maar dan gecombineerd met de resultaten van de leerlingen (in dit geval de resultaten van de 5 vwo klas). Deze figuur geeft enige extra informatie t.o.v. een item-person map.
Er vallen een paar zaken op.

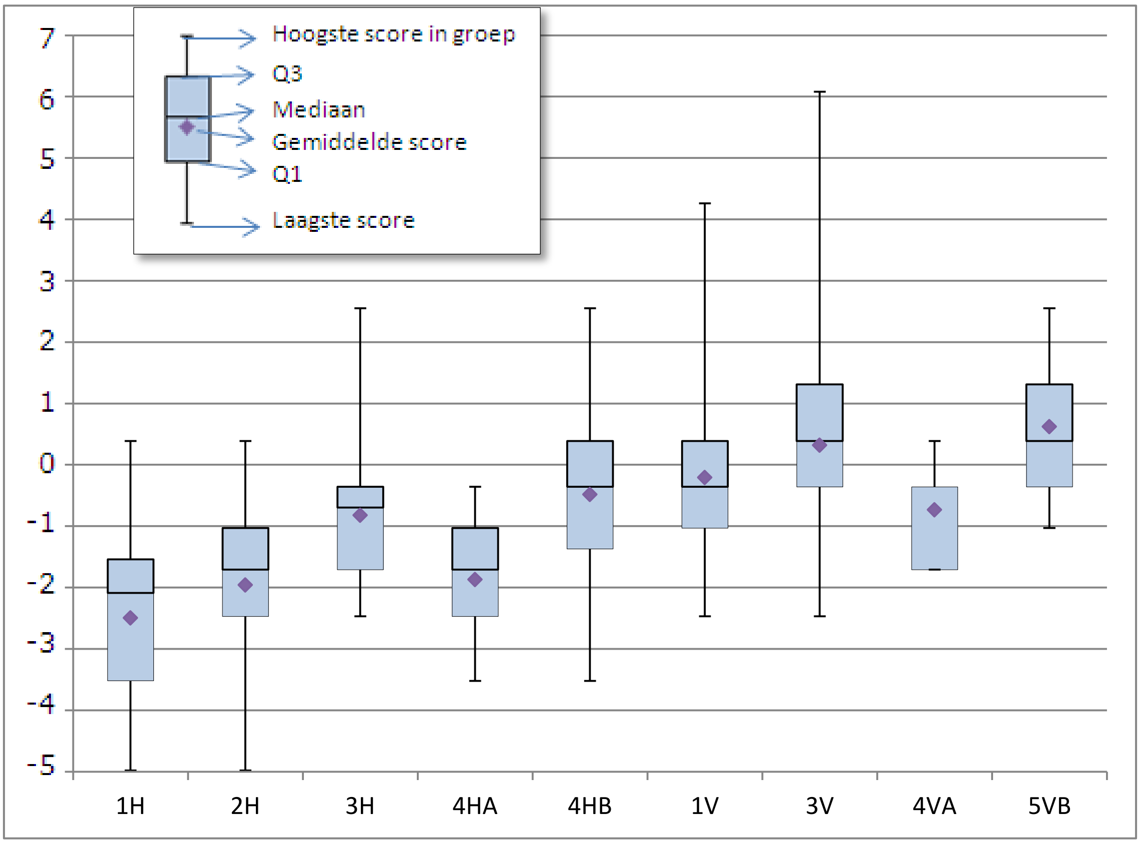
- De 'bollen' stellen de resultaten van de leerlingen voor en de grootte van de bollen slaan op de (statistische) onzekerheid van de score welke op de verticale as is af te lezen (in logits).
- We zien scores van globaal -1 tot bijna +3 logits; De verdeling van de vragen in dit interval is goed. De vragen lopen uiteen van gemakkelijk (-3 logits) tot ruim 4 logits; als de moeilijkheid van vragen niet overeenkomt met de moeilijkheid van de leerlingen, dienen de vragen aangepast te worden.
- Een volgend punt is de twee leerlingen, waarvan de resultaten zich in het rode gebied bevinden. Dit duidt op de noodzaak van een nadere analyse, want hier kan iets bijzonders aan de hand zijn. Het betreft hier o.m. leerling 5VB05 en een nadere analyse van de antwoorden op de vragen leert ons dat deze leerling 8 van de 10 vragen goed heeft (komt overeen met een Rasch schaal van ongeveer 2,5 logits). Nog meer dienen we te kijken naar het antwoord op twee relatief eenvoudige vragen.
  De betreffende leerling heeft o.m. vraag D fout, wat de een na gemakkelijkste vraag is. Mogelijk is hier iets aan de hand. Het resultaat klopt in ieder geval niet met het model (misfit). Bekijken van de origineel gemaakt opgaven levert dat de hier gemaakt fout geen fundamentele fout is. Leerling heeft netjes de opgave gemaakt (en opgeschreven), alleen heeft hij "$10.000.000 : 25 = 4.000.000$" staan. De conclusie die je dan hieraan kunt verbinden is dat deze misfit een gewone verklaring heeft en dat je hier verder geen vraagtekens bij hoeft te zetten (leerling heeft in de andere vragen nog 1 kleine rekenfout ("$115 - 88 = 37$") gemaakt en verder alles goed.
- De tweede leerling met een grote misfit (leerling 5VB24) heeft 5 vragen fout, maar niet de vijf moeilijkste vragen. Leerling scoort zeer wisselend (1^e, 4^e, 5^e, 8^e en 10^e vraag qua moeilijkheid fout). Uit de antwoorden blijkt dat hij enerzijds 'slordig' werkt (eenmaal restgetal groter dan deler; eenmaal verschrijving) en anderzijds problemen heeft als deler of deeltal decimalen heeft.
- Verder is er niet systematisch gekeken naar de uitwerking zelf van de opgaven.

De gebruikte Rasch analyse heeft als voordeel dat vrij snel vreemde uitslagen in beeld gebracht kunnen worden. Zo ontstaat er een eerste indicatie voor bijvoorbeeld fraude of concentratieproblemen. De gebruikte software bevat verder de tools om de gewenste analyse te kunnen uitvoeren. Voor het analyseren staan ons vele tabellen, en overzichten ter beschikking met de bijbehorende software.



Figuur 10 - Items en leerlingen (5V)

Wat nog rest is een goede samenvatting van de resultaten van de gemaakte toetsen. De resultaten zijn samengevat in de volgende figuur met boxplots per klas.



Figuur 11 - Boxplots van resultaten leerlingen op Rasch schaal

We zien hier bijvoorbeeld dat de eerste drie leerjaren van de havo, de resultaten qua vaardigheid delen (uiteraard zonder de rekenmachine!) steeds iets vooruitgaan. De havo-leerlingen die wiskunde A volgen scoren iets lager dan de leerlingen uit de 3 havo klas op de vaardigheidsschaal, terwijl de 4 havo wiskunde b leerlingen wel doorgroeien. Een gelijksoortige situatie voor de vwo leerlingen. Opgemerkt wordt wel dat er geen sprake is van vooruitgang of achteruitgang van dezelfde groep leerlingen. Het betreft geen longitudinaal onderzoek waarbij leerlingen worden gevolgd, maar een eenmalige afname van de toets onder verschillende groepen.

Het absolute niveau zal ik in het volgende paragraaf bespreken.

6.2 Onderzoeksvragen en conclusies

Voordat we toekomen aan de hoofdvraag van het onderzoek, wil ik eerst de deelvragen de revue laten passeren.

Referentieniveaus en (staart)delen in de doorlopende leerlijnen?

- De elementaire bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen komen in de kerndoelen po (zie bijlage A) voldoende naar voren. Bij *Getallen en bewerkingen* worden in kerndoelen 28, 29 en 30 in voldoende mate eindtermen bepaald voor het po. Alleen de toevoeging "… volgens meer of minder verkorte standaardprocedures." laat wel een zekere vrijheid over betreffende het wel of niet 'algoritmisch' (staart)delen.
- In de kerndoelen onderbouw vo – wiskunde/rekenen (zie bijlage 2) wordt gerefereerd aan het belang van de rekenvaardigheden om de doorlopende leerlijnen van po, via vo naar mbo, hbo en universiteit te waarborgen.
- Sinds het invoeren van de referentieniveaus taal en rekenen (en met name sinds de invoeren van de rekentoetsen (2F en 3F) is er meer aandacht gekomen voor de **doorlopende** leerlijnen met betrekking tot de rekenvaardigheden, maar we zien in de onderbouw binnen de wiskundelessen een gering voortbouwen op de (reken)didactieken welke in het po zijn ingezet. Deze laatste kunnen meer liggen in de lijn van het traditionele rekenen (minderheid) alsook voortkomen uit de realistische hoek. We zien wel steeds meer dat extra capaciteit wordt ingezet om de vereiste rekenvaardigheidsniveaus te gaan behalen (rekenvaardigheid wordt een van de kernvakken – naast wiskunde, nederlands en engels).
- Geconstateerd wordt dat bij de 2F en 3F toetsen slechts een klein deel van de toetsvragen (ongeveer 20%) zonder rekenmachine gemaakt moeten worden en dat de gestelde vragen zich niet helemaal verhouden tot de in de leerlijnen en leermethoden aangeleerde technieken en vaardigheden m.b.t. de elementaire bewerkingen (toetsvragen beperken zich tot het meest elementaire deel van deze bewerkingen).

Conclusie hier is dat er ondanks de invoering van het referentiekader en de bijbehorende verplichte rekentoetsen voor iedereen, er binnen de lessen wiskunde (evt. rekenen) weinig (doorlopende) aandacht is voor de elementaire rekenvaardigheid in het algemeen en de bewerking delen in het bijzonder.

Wat zeggen aanhangers van het traditioneel en realistische rekenen m.b.t. de (staart)deling?

- De afgelopen jaren hebben vaak een beeld gegeven als ware er een polarisatie op het gebied van de rekenvaardigheid. Waar de laatste vier, vijf decennia een duidelijke verschuiving is ontstaan vanuit het traditionele rekenen naar het Realistisch Rekenen (met namen als Freudenthal, Treffers en Gravemeijer) hebben aanhangers van het meer traditionele rekenen (verenigd in vereniging BON – Beter Onderwijs Nederland en als belangrijkste vertegenwoordiger van de Craats) onder invloed van de vaak matige rekenprestaties van de leerlingen de laatste jaren weer enig terrein 'gewonnen'.

  De polarisatie uit zich vaak in minder genuanceerde uitspraken over rekenen, rekenvaardigheid en de bijbehorende didactiek. Het delen en dan met name de staartdeling lijkt wel een symbolische waarde te zijn gaan spelen in de gehele discussie. De staartdeling staat daarbij symbool voor de gehele rekenvaardigheid. Als we kijken naar de oplossingsstrategie welke bij het delen hoort, zien we kleinere verschillen dan wat op grond van de vele discussies verwacht zou mogen worden. Een staartdeling en kolomsgewijs delen staan mogelijk niet tegenover elkaar maar beide kunnen elkaar aanvullen en een rol spelen als we kijken naar de vele (volgtijdelijke) stappen welke leren rekenen met zich meebrengt.

- Gravemeijer geeft in het artikel "Wat is het probleem" (Gravemeijer, 2010) weer waar het mogelijkerwijs om draait. Het gemis van een goede probleemanalyse. Alle initiatieven (meer geld voor het rekenonderwijs; rekenlessen voor iedereen; rekentoetsen voor alle leerlingen) lijken goed bedoeld, maar een goede brede probleemanalyse zou hieraan vooraf moeten gaan. Gravemeijer noemt het nadeel van een eenzijdige concentratie op de algebraïsche rekenvaardigheid op zich. Hij concludeert dat niet alleen de vraag naar 'wat' er geleerd moet worden relevant is, maar zeker ook de vraag naar 'hoe' dit moet worden bereikt. Alleen zo kan de problematiek van de aansluiting tussen het po en het vo worden opgelost. Naast een analyse naar de oorzaken van achterblijvende rekenvaardigheid noemt hij als belangrijk aspect de vraag naar uitstroomrelevantie. Waar heeft de veranderde maatschappij behoefte aan.

Hoe staat het met de kennis en kunde van de leerlingen in het vo (havo / vwo)

- Als we kijken naar de resultaten van de afgelegde test door de ruim 200 leerlingen, zien we dat slechts 25% van de leerlingen meer dan 5 vragen goed heeft beantwoord. Op grond hiervan – en nog los van de vraag wat voldoende en onvoldoende is – zou ik willen concluderen dat het niveau van de meeste leerlingen die de toets hebben afgelegd te laag is.
- Ondanks dat er geen systematische analyse heeft plaatsgevonden (was ook niet de bedoeling) naar de gebruikte oplossingsstrategieën van de opgaven door de leerlingen, heb ik gezien dat er in een zeer substantieel deel van de opgaven die gemaakt zijn een staartdeling of kolomsgewijs delen is gebruikt, waarbij het kolomsgewijs delen een duidelijke voorkeur had.
- Als we de resultaten van de leerlingen uit de verschillende klassen (leerjaren) vergelijken, valt op dat de slechtste resultaten in de brugklas zijn gescoord. Dit heeft mogelijk te maken met een slechte aansluiting tussen het po en het vo betreffende de rekenvaardigheden. Mogelijk wordt er in het vo vanuit gegaan dat de leerlingen zouden moeten kunnen delen wordt er daarna geen of weinig aandacht aan besteed. De laatste paar jaar is er echter een terugkerende aandacht voor rekenvaardigheid en wordt in ieder geval in de gebruikte wiskunde/rekenmethoden meer aandacht besteed aan deze rekenvaardigheid.

Wat is de mening van de docenten in het vo t.a.v. rekenvaardigheid en (staart)delingen?

Gezien de omvang van het afstudeeronderzoek zijn slechts enkele docenten geïnterviewd. Voor zover dit mogelijk is (laag aantal geïnterviewden) worden hier toch enkele opmerkelijke bevindingen vermeld. Hieraan kunnen geen algemeen geldende conclusies worden verbonden.

- Kennis over inhoud van referentieniveaus, achtergrond over de geschiedenis van het rekenonderwijs / rekendidactieken en inzicht in de huidige literatuur over rekenvaardigheid waren slechts oppervlakkig aanwezig bij de geïnterviewde docenten.
- Alle docenten zagen een achterstand op het gebied van rekenvaardigheid bij de leerlingen waarbij oorzaken werden gezocht in te weinig oefenen (zoals ‘vroeger werd gedaan’) in het po, maar ook in het vo. Vanwege tijdsdruk zou er geen substantiële hoeveelheid tijd vrijgemaakt kunnen worden gedurende de wiskundelessen.
- Wat wel werd gedaan op de school was een extra uur in de week voor deel van de onderbouwleerlingen waarin afwisselend taal en rekenen werd gegeven. Dit gebeurde alleen door een grote verscheidenheid aan docenten zonder voldoende kennis en kunde om ook extra uitleg te geven (zelfstandig doorwerken theorie en opgaven door leerlingen). Er zijn aantal initiatieven genomen om de bestaande praktijk uit te breiden en te verbeteren en ook in de wiskundelessen meer aandacht te gaan geven een de rekenvaardigheid (minder gebruik rekenmachine; af en toe uitleg waar tekortkomingen worden geconstateerd e.d.).
- Over de noodzaak van een goede rekenvaardigheid liepen de meningen enigszins uiteen. Deze varieerden van
    - “*zolang de principes van de elementaire bewerkingen duidelijk zijn hoeven ze geen vaardigheid te bezitten in het zonder rekenmachine (kunnen) oplossen van de iets moeilijkere opgaven. Dit zou nl. alleen maar extra tijd kosten die de leerlingen beter kunnen besteden*.” tot
    - “*Van belang voor verdere schoolcarrière en vervolgopleiding. Wat ze nodig hebben is automatiseren en veel oefenen*”.
- Alle geïnterviewde docenten vinden wel dat de leerlingen meer dan de helft van de vragen goed zouden moeten kunnen beantwoorden.

Conclusie op de vraag “Kunnen leerlingen in het voortgezet onderwijs (havo en vwo) nog (staart)delen en zo nee, missen ze dan iets?

- Op grond van de resultaten van de afgelegde toetsen door de ruim 200 leerlingen en de (arbitraire) eis van meer dan de helft van de opdrachten zou goed gemaakt moeten zijn, kan de het eerste deel van de vraag alleen negatief worden beantwoord: de leerlingen in het voortgezet onderwijs (havo en vwo) kunnen onvoldoende (staart)delen.
- Het tweede deel van de vraag is iets lastiger te beantwoorden. Missen de leerlingen iets als ze de vaardigheid niet beschikken? In engere zin missen de leerlingen een vaardigheid welke volgens het curriculum beheerst zou moeten worden. In bredere zin zou gekeken moeten worden naar de educatieve (vervolgstudies) en maatschappelijke betekenis van de benodigde rekenvaardigheid voordat deze vraag ondubbelzinnig beantwoord kan worden. Mogelijk zal een goede analyse van de oorzaken (Gravemeijer, 2010) tevens een antwoord geven op de vraag waar het is misgegaan tussen het moment van aanleren van de vaardigheid en het moment waarop we constateren dat de vaardigheid is verdwenen.

7 Nawoord en evaluatie

Enkele jaren geleden heb ik de overstap gemaakt naar het onderwijs. Mijn eerste ervaringen in het in groepsverband lesgeven op scholen staan me nog erg bij. Leerlingen in het vo die – althans, dat ervaarde ik zo – geen staartdeling konden maken en ‘slecht’ rekenden. Grote verwondering.

Deze verwondering heeft nu plaatsgemaakt voor een mogelijk even grote verwondering, maar dan gericht op de vraag waarom er geen *common sense* onder betrokkenen is om te komen tot een grote inhaalslag om de ontstane lacunes op het gebied op te lossen. Iedereen die – direct of indirect - betrokken is bij rekenvaardigheid en de bijbehorende onderwijs-activiteiten heeft uiteraard de beste intenties om te komen tot een betere rekenvaardigheid, maar desondanks lukt het niet de rijen te sluiten.

We zullen eerst moeten bepalen waar het om gaat bij het ontwikkelen van de rekenvaardigheid. Willen we de focus leggen op het feilloos kunnen rekenen (zonder rekenmachine); gaat het om het ontwikkelen van verschillende wiskundige abstractieniveaus of gaat het om het vertalen van contextgebonden situaties in wiskundig geformuleerde vraagstukken? Wat wordt er in de toekomst gevraagd van de mensen welke we in een onderwijsomgeving proberen klaar te stomen voor een goed functioneren in de maatschappij? Welke competenties zijn daarbij van wezenlijk belang?

Ik geloof in hetgeen Gravemeijer zo mooi heeft verwoord in “Wat is het probleem?” (Gravemeijer, 2010). Naast de vraag naar het ***wat***, speelt de vraag naar het ***hoe***. Onderzocht zal moeten worden *hoe* de lacunes in de rekenvaardigheid zijn ontstaan; *hoe* rekenvaardigheid aangeleerd kan worden; *hoe* te komen tot de juiste competenties. Slechts met het beantwoorden van deze vraag kan het ***wat*** worden bereikt.

Ik ben een aanhanger (geworden) van relational understanding (Skemp, 1976) in plaats van instrumental understanding en daarmee ook van ‘relational teaching’. Natuurlijk leiden er meerdere wegen naar Rome en de vraag *hoe* te komen tot een goede kennis en kunde bij leerlingen zal een voortdurend proberen, zoeken en verbeteren blijven.

In het kader van het op peil houden of verbeteren van een goede rekenvaardigheid wil ik nog een opmerking maken over de rol van de docent. Een rol die m.i. een cruciale is. De docent zal in het bestaande onderwijssysteem een beslissende rol (kunnen) spelen. Daarom zal er meer nadruk moeten komen liggen op (bij)scholing van een docent en op een verdere professionalisering van de beroepsgroep. Slechts door meer eensgezindheid op dit vlak zullen vernieuwingen en veranderingen een kans maken. Een breed gedragen visie en opvattingen over (reken)/wiskundeonderwijs op een school zijn m.i. van doorslaggevend belang voor goed onderwijs.

Als laatste wil ik graag Geeke Bruin-Muurling bedanken. Ze heeft me – mogelijk onbewust maar waarschijnlijk bewust – over een aantal zaken aan het denken gezet. Over rekenen en rekenvaardigheid; over toetsen maken en toetsen beoordelen, maar bovenal over hoe zaken werken in de onderwijswereld.

Literatuur[1]

Ale, P. F. J., & Schaik, M. v.,. (2011). Rekenen en wiskunde uitgelegd : Kennisbasis voor leerkrachten basisonderwijs. Bussum: Coutinho.

Baarda, D. B., & Goede, M. P. M. d. (2006). Methoden en technieken basisboek : Handleiding voor het opzetten en uitvoeren van kwantitatief onderzoek. Groningen [etc.]: Wolters-Noordhoff.

Bergh, J. v. d., & Bataille Tekst Etc. (Utrecht). (2012). Rekenwijzer. Amersfoort: ThiemeMeulenhoff.

Bond, Trevor G., Fox,Christine M., (2010). Applying the rasch model : Fundamental measurement in the human sciences. New York; London: Routledge.

Boone, W. J., & Scantlebury, K. (2006). The role of rasch analysis when conducting science education research utilizing multiple-choice tests. Science Education, 90(2), 253-269.

Boone, W., & Rogan, J. (2005). Rigour in quantitative analysis : The promise of rasch analysis techniques. Saarmste African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 9(1), 25-38.

Bruin-Muurling, G., Gravemeijer,K.& van Eijck, M. (2010). Aansluiting schoolboeken basisschool en havo/vwo. Nieuw Archief Voor Wiskunde, 5/11(2010)(1), 33-5.

Bruin-Muurling, G. (2011). Introductie rasch analyse; presentatie voor colleges onderwijskunde, ESOE. Unpublished manuscript.

Bruin-Muurling, G. (2010). Thedevelopment of profiency in the fraction domain : Affordances and constraints in the curriculum. Eindhoven: Fontys [etc.].

Buijs, K., Klep, J., Noteboom, A., & Klein Tank, M. (2008). TULE - rekenen / wiskunde : Inhouden en activiteiten bij de kerndoelen van 2006. (No. AN-no: 1.4312.065). Enschede: SLO, 2008.

Eggen, T. J. H. M., & Sanders, P. F. (1993). Psychometrie in de praktijk. Arnhem: Cito Instituut voor Toetsontwikkeling.

Enzensberger, H. M., Berner, R. S., & Meeuse, P. (2005). De telduivel : Een hoofdkussenboek voor iedereen die bang voor wiskunde is. Amsterdam: De Bezige Bij.

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen. (2008). Eindrapportage van de expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.

[1] Betreft geraadpleegde literatuur. Literatuur waarnaar verwezen is, staat in vet letterschrift.

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen. (2008). Over de drempels met taal en rekenen : Hoofdrapport van de expertgroep doorlopende leerlijnen taal en rekenen. Enschede: Expertgroep Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen.

Goffree, F. (1992). Wiskunde & didactiek voor aanstaande leraren basisonderwijs dl. 2. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Goffree, F., & Oonk, W.,. (2004). Reken vaardig : Van basale gecijferdheid naar professionele gecijferdheid. Groningen [etc.]: Wolters-Noordhoff.

Gravemeijer, K. (2000). Meten als basis voor het rekenen met de lege getallenlijn. Panama-Post: Tijdschrift Voor Nascholing En Onderzoek Van Het Reken-Wiskundeonderwijs, 18 (3), 37-46.

Gravemeijer, K. (2003). Willem bartjens: Betekenisvol rekenen: Op zoek naar de wiskunde in een contextopgave.jrg. 22(nr. 4), 5-8.

Gravemeijer, K. (2005). Revisiting 'mathematics education revisited'. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Gravemeijer, K. (2006). Wiskunde leren is complexer dan je denkt. reactie op 'vraagtekens bij relaistisch rekenonderwijs'. Tijdschrift Voor Nascholing En Onderzoek Van Het Reken-Wiskundeonderwijs : Panama-Post, 25(1), 33-36.

Gravemeijer, K. (2007). Reken-wiskundeonderwijs anno 2007 - tussen oude waarden en nieuwe uitdagingen. Tijdschrift Voor Nascholing En Onderzoek Van Het Reken-Wiskundeonderwijs : Panama-Post, 26(4), 3-10.

Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., & van Eijck, M. (2009). Aansluitingsproblemen tyussen primair en voortgezet onderwijs - geen doorgaande lijn voor het vermenigvuldigen van breuken. Panama-Post: Tijdschrift Voor Nascholing En Onderzoek Van Het Reken-Wiskundeonderwijs, 28 (4), 14-19.

Gravemeijer, K. (2010). Wat is het probleem? Euclides., 86(2), 62 - 69.

Gulik, I. v., Krŭger, J., Zwaart, P. v. d., & Bonset, H. (2009). Vakdossier wiskunde. Enschede: SLO, nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling.

Heuvel-Panhuizen, M. v. d. (2009). Hoe rekent nederland?. [Utrecht]: Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (FIsme), Universiteit Utrecht.

Heuvel-Panhuizen, M. v. d. & Wijers (2005), M.. Mathematical standards and curricula in the Netherlands, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 37 (4), 287-307.

Hoogland, K. (2008). Onderwijs - nostalgische terugblik op de staartdeling. Nieuw Archief Voor Wiskunde., 9(4), 279-281.

Hubers, M., & Gompel, M. (2011). Realistisch versus traditioneel rekenonderwijs: Welke leerlingen passen beter. Orthopedagogiek: Onderzoek En Praktijk, 50, 21-31.

Kaenders, R. (2003). Verum, pulchrum, bonum. Nieuw Archief Voor Wiskunde, 4(2), 161-164.

Keijzer, R. &. G., K. (2005). Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen in discussie. Tijdschrift Voor Nascholing En Onderzoek Van Het Reken-Wiskundeonderwijs : Panama-Post, 24((1)), 24-29.

Kool, M. (1999). Die conste vanden getale : Een studie over nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen. Hilversum: Verloren.

Leuverink, J. (2010). De doorlopende leerlijn bij het vermenigvuldigen van breuken. (Masters, Technische Universiteit Eindhoven (TUE). Eindhoven School of Education (ESoE). Opleiding Wiskunde.). Afstudeerverslagen Eindhoven School of Education,

Linacre, J. M. (2006). Winsteps (Version 3.61.2) [Computer Software]. Chicago. Winsteps.com.

Liu, X., & Boone, W. J. (Eds.). (2006). Chapter 1: Introduction to rasch measurement in science education [Book: Applications of Rasch measurement in science education]. Maple Grove, Minn.: JAM Press.

Ministerie van Onderwijs,Cultuur en Wetenschappen. (1998). Kerndoelen basisonderwijs 1998 : Over de relaties tussen de algemene doelen en kerndoelen per vak. Zoetermeer; [Den Haag: Sdu-servicecentrum distr.]: Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen] ;.

Moor, E. d. (2009). Zonder verleden geen toekomst; ontwikkeling van de rekendidactiek in nederland gedurende de 20-ste eeuw. Panama-Conferentie 2009: Leren Van Evalueren - De Lerende in Beeld Bij Rekenen-Wiskunde -, 85-99.

Nelissen, J. (2008). Intuïtie: Over intuïtie en probleemoplossen. Tijdschrift Voor Nascholing En Onderzoek Van Het Reken-Wiskundeonderwijs : Panama-Post, 27(1), 3-13.

OCW (2006). Kerndoelen Primair Onderwijs.

OCW (2010). Kerndoelen onderbouw Voortgezet Onderwijs.

Rademakers, G., Van Putten, C., Beishuizen, M., & Janssen, J. (2004). Traditionele en realistische algoritmen bij het oplossen van deelsommen in groep 8. Tijdschrift Voor Nascholing En Onderzoek Van Het Reken-Wiskundeonderwijs : Panama-Post, 23 (4), 3-7.

Rasch, G. (1960). Probabilistic models for some intelligence and attainnment tests. [Copenhagen]: Danmarks paedagogiske Institut.

Rasch, G. (1980). Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. Chicago: University of Chicago Press.

Rottenberg, H. (2011, December 7). Met twee woorden : Rekenen en taal; de terugkeer naar rekenen zonder flauwekul. De Groene Amsterdammer,

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching, 77, 20-26.

SLO (2012). Tussendoelen wiskunde onderbouw vo havo/vwo.

Streefland, L. (1983). Aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens wiskobas : Verslag van een exploratief onderzoek : Theoretisch deel 1. Utrecht: Vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs & Onderwijs computercentrum, Rijksuniversiteit Utrecht.

Treffers, A. (1987-2). Integrated column arithmetic according to progressive schematisation. Educational Studies in Mathematics, 18(2), 125-145.

Treffers, Adrian. (1987). Three dimensions : A model of goal and theory description in mathematics instruction--the wiskobas project. Dordrecht, Holland; Boston; Norwell, MA, U.S.A.: D. Reidel ; Sold and distributed in the U.S.A. and Canada by Kluwer Academic Publishers.

Van de Craats, J. & Bosch, R.,. (2007). Basisboek rekenen. Amsterdam: Pearson Education.

Van de Craats, J. (2008). Waarom daan en sanne niet kunnen rekenen. (No. 8).

Van Putten, C. (2008). De onmiskenbare daling van het prestatiepeil bij de bewerkingen sinds 1987. Tijdschrift Voor Nascholing En Onderzoek Van Het Reken-Wiskundeonderwijs : Panama-Post, 27 (1), 35-40.

Van Putten, C. &. Hickendorff., M. (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van ddelopgaven in de periodieke peilingen aan het einde van de basisschool van 2004 en 1997. Tijdschrift Voor Nascholing En Onderzoek Van Het Reken-Wiskundeonderwijs : Panama-Post, 25 (2), 16-25.

Van Vugt, R., & Janson, D. (2011). Rekenonderwijs verbeteren? begin bij je opvattingen over rekenen! Panama-Conferentie 2011: Reken-Wiskundeonderwijs - Aanpassen, Inpassen, Troepassen,

Visser, H. (2008). Rekenen? Nieuw Archief Voor Wiskunde, 5/9 (2008)(1), 76-79.

Yu, C. H. (2012). A simple guide to the item response theory (IRT) and rasch modeling. Retrieved 2013, 04/30, 2013, from http://www.creative-wisdom.com/computer/sas/IRT.pdf

Yu, C. H., Jannasch-Pennell, A., & DiGangi, S. (2008). A non-technical approach for illustrating item response theory. Journal of Applied Testing Technology, 9(2), 1-32.

Zanten, M. v., Bergh, J. v. d., Meijer, R., & Wolthuis, F. (2008). Verhoudingen en procenten. Utrecht [etc.]: ThiemeMeulenhoff. Ale, P. F. J., & Schaik, M. v.,. (2011). *Rekenen en wiskunde uitgelegd : Kennisbasis voor leerkrachten basisonderwijs*. Bussum: Coutinho.

Bijlage A Kerndoelen po – wiskunde/rekenen

Wiskundig inzicht en handelen

23. De leerlingen leren wiskundetaal gebruiken.
24. De leerlingen leren praktische en formele rekenwiskundige problemen op te lossen en redeneringen helder weer te geven.
25. De leerlingen leren aanpakken bij het oplossen van rekenwiskundeproblemen te onderbouwen en leren oplossingen te beoordelen.

Getallen en bewerkingen

26. De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.
27. De leerlingen leren de basisbewerkingen met gehele getallen in elk geval tot 100 snel uit het hoofd uitvoeren, waarbij optellen en aftrekken tot 20 en de tafels van buiten gekend zijn.
28. De leerlingen leren schattend tellen en rekenen.
29. De leerlingen leren handig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
30. De leerlingen leren schriftelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens meer of minder verkorte standaardprocedures.
31. De leerlingen leren de rekenmachine met inzicht te gebruiken.

Meten en meetkunde

32. De leerlingen leren eenvoudige meetkundige problemen op te lossen.
33. De leerlingen leren meten en leren te rekenen met eenheden en maten, zoals bij tijd, geld, lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht, snelheid en temperatuur.

Bijlage B Kerndoelen onderbouw vo – wiskunde/rekenen

Er zijn negen kerndoelen die betrekking hebben op rekenen en wiskunde. Er wordt ruimte gelaten deze uit te werken op basis van verschillende opvattingen en leerstijlen. Uiteindelijk gaat het bij deze kerndoelen in de eerste plaats om de gebruiksmogelijkheden van (elementaire) rekenvaardigheden en van wiskunde buiten en binnen het onderwijsprogramma, zowel in de onderbouw als in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs (inclusief het derde leerjaar havo / vwo).

Systematische aandacht in het onderwijsprogramma voor (elementaire) rekenvaardigheden is van belang om doorlopende leerlijnen te realiseren van primair onderwijs, via het voortgezet onderwijs, naar mbo en hoger onderwijs.

19. De leerling leert passende wiskundetaal te gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen, en leert de wiskundetaal van anderen te begrijpen.
20. De leerling leert alleen en in samenwerking met anderen in praktische situaties wiskunde te herkennen en te gebruiken om problemen op te lossen.
21. De leerling leert een wiskundige argumentatie op te zetten en te onderscheiden van meningen en beweringen, en leert daarbij met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen.
22. De leerling leert de structuur en de samenhang te doorzien van positieve en negatieve getallen, decimale getallen, breuken, procenten en verhoudingen, en leert ermee te werken in zinvolle en praktische situaties.
23. De leerling leert exact en schattend rekenen en redeneren op basis van inzicht in nauwkeurigheid, orde van grootte en marges die in een gegeven situatie passend zijn.
24. De leerling leert meten, leert structuur en samenhang doorzien van het metrieke stelsel, en leert rekenen met maten voor grootheden die gangbaar zijn in relevante toepassingen.
25. De leerling leert informele notaties, schematische voorstellingen, tabellen, grafieken en formules te gebruiken om greep te krijgen op verbanden tussen grootheden en variabelen.
26. De leerling leert te werken met platte en ruimtelijke vormen en structuren, leert daarvan afbeeldingen te maken en deze te interpreteren, en leert met hun eigenschappen en afmetingen te rekenen en te redeneren.
27. De leerling leert gegevens systematisch te beschrijven, ordenen en visualiseren, en leert gegevens, representaties en conclusies kritisch te beoordelen.

Bijlage C Vragenlijst Delingen

Op de volgende 6 pagina's staat de vragenlijst welke aan de leerlingen is voorgelegd. De lay-out van de vragenlijst was zoals deze op de pagina's is iets verkleind, maar waren in werkelijkheid volledige A4 pagina's.

KLAS	

Beste leerling,

Je gaat deelnemen aan een klein onderzoek over delen.

Hieronder staan 10 opgaven gegeven waarbij je twee getallen moet delen. Ze variëren in moeilijkheidsgraad. Je kunt de opgaven maken op verschillende manieren. Gebruik de methode die je 'normaal' zou gebruiken.

Probeer de opgaven rustig te maken en gebruik de open ruimte om de opgave uit te rekenen. De ruimte binnen de blokken mag je ook gebruiken als kladpapier.

We willen kijken naar de manier waarop je de opgaven maakt.

Je krijgt geen cijfer. De resultaten zullen mogelijk wel gebruikt worden voor het verbeteren van de rekenvaardigheid van jouw klas. Uiteraard zullen ook andere leerlingen profiteren van de resultaten van het onderzoek.

BEDANKT en SUCCES

De eerste vier opgaven betreffen zgn. delingen met rest.
Voorbeeld is $15 : 5 = 3$ (*rest* 0) of $13 : 5 = 2$ *rest 3*

1	$448 : 7 =$

2	3983 : 17 =
3	821337 : 47 =

4	250 000 000 : 625 =

Bij de volgende opgaven is het de bedoeling dat je een decimaal getal als uitkomst krijgt. Geef in voorkomend gevallen de eerste drie decimalen en vergeet de decimalen daarna.

Voorbeeld is 5 : 3 = 1,666

5	1155 : 44 =

6	1234,75 : 15 =
7	35604,2 : 25,3 =

8	2458,7 : 1,214 =
9	7438657234 : 1000 =

10	345456 : 0,01 =

Als je nog opmerkingen kwijt wilt over delen (of rekenen), kun je deze hieronder noteren.