Betekenisvol rekenen

Op zoek naar de wiskunde in een contextopgave

Koeno Gravemeijer

Hoe los je een contextopgave op? De eerste stap bestaat uit het maken van een wiskundige vertaling, een wiskundige interpretatie van de context. Klassengesprekken over hoe je dat kunt doen zijn van groot belang. Pas als het contextprobleem een rekenprobleem is geworden, kun je de berekening gaan uitvoeren.

Aanvullen of afhalen
Leerlingen uit groep drie werken aan de volgende opgave:

An heeft 23 kralen. Ze wil een snoer van 18 kralen maken.
Hoeveel kralen houdt ze over?

Suzanne denkt even na en begint dan systematisch terug te tellen, 'één eraf is tweeëntwintig', 'twee eraf is eenentwintig', enzovoort. Lang voordat ze daarmee klaar is zit Dave al met zijn vinger omhoog. En voordat Suzanne haar telwerk heeft afgerond, start de nabespreking. De pennen worden neergelegd en Dave krijgt de beurt. Hij antwoordt: 'vijf.' Op de vraag hoe hij daaraan komt zegt hij: 'Achttien plus twee is twintig en twintig plus drie is drieëntwintig, en twee en drie is samen vijf.' De juf die weet dat Suzanne moeite heeft met rekenen vraagt haar het antwoord te herhalen. Maar Suzanne kijkt haar niet begrijpend aan. 'Je moet wel opletten', zegt de juf.
Wat gaat hier mis?

Aanpak van contexten in drie stappen
Suzanne heeft het contextprobleem geïnterpreteerd als een aftreksituatie; 23 - 18 = … Dave ziet het echter als aanvullen; 18 + … = 23. Zo komt het dat Suzanne niet begrijpt wat de aanpak van Dave met de opgave te maken heeft. In feite wordt er in deze situatie een stap overgeslagen. Bij het oplossen van een contextopgave moet je op zijn minst twee stappen maken. De eerste stap bestaat uit het interpreteren van het contextprobleem en het transformeren van het contextprobleem in een rekenprobleem. De tweede stap bestaat uit

Eerst de contextopgave interpreteren, dan pas rekenen

het uitvoeren van de berekening.
In de eerste stap staat de betekenis van de getallen in de context voorop. Suzanne interpreteert de situatie als: 'Je hebt 23 kralen en daar neem je er 18 van weg om een kralensnoer te maken.' Zij haalt 18 van 23 af en kijkt wat er overblijft. Dave redeneert: 'Je hebt 23 kralen en je hebt er 18 nodig, dus houd je straks kralen over. Het gaat om het verschil tussen 23 en 18.' Dus hij gaat uitrekenen hoeveel 23 meer is dan 18.
In de tweede stap gaat het erom hoe je de berekening uitvoert, los van de betekenis van de getallen. Dave kiest ervoor om 18 + … = 23 op te lossen door eerst tot 20 aan te vullen en daarna het verschil tussen 20 en 23 erbij te tellen. Suzanne probeert 23 – 18 uit te rekenen via terugtellen.
Idealiter volgt er nog een derde stap waarbij de uitkomst van de berekening wordt teruggeplaatst in de context en wordt gecontroleerd of de oplossing voldoet.

Rekenen moet betekenisvol zijn
In de praktijk gaan onderwijsleergesprekken vooral over de tweede stap: 'Hoe heb je het uitgerekend?' Dat is niet zo verwonderlijk, want de interpretatie van de contextopgave ligt immers besloten in de rekenkundige uitwerking. Maar als die interpretatie niet expliciet besproken wordt, gaat er wel een essentieel element van realistisch reken-wiskundeonderwijs verloren. Het is namelijk niet gezegd dat een leerling die voor een goede berekening kiest, zich ook de relatie tussen berekening en context realiseert. Zo is bekend dat nogal wat leerlingen naar sleutelwoorden in een context zoeken en naar de grootte van de getallen kijken om te beslissen welke bewerking ze zullen kiezen, zonder na te denken over de feitelijke context. Daarmee vervalt het wiskundig interpreteren van reële contexten en daarmee ook de basis voor gecijferdheid.
Bij gecijferdheid verwachten we dat iemand niet alleen kan rekenen, maar zich ook realiseert wat de getallen waarmee wordt gerekend betekenen. Het is belangrijk dat het rekenwerk niet losstaat van de context. In dit verband zou ik willen pleiten voor 'betekenisvol rekenen'.

Bespreken van interpretaties
Bij betekenisvol rekenen gaat het mij om de relatie tussen het rekenwerk en de context. Zoals ik in de voorgaande schets heb laten zien is die relatie voor leerlingen niet zo vanzelfsprekend als we soms geneigd zijn te denken. Wanneer er verschillende interpretaties mogelijk zijn en deze worden niet besproken, dan bestaat het gevaar dat een leerling niet ziet hoe de oplossingsprocedure die in een bepaald geval wordt gekozen samenhangt met de context. Een leerling kan immers een heel andere wiskundige interpretatie

van het contextprobleem in gedachten hebben, waarbij een andere oplossingprocedure meer voor de hand ligt.
Dat dit gemakkelijk kan gebeuren wil ik toelichten met een voorbeeld.

Verdelen of afpassen?

Leerlingen van groep 5 kregen een opgave voorgelegd, over drie kinderen die samen 36 snoepjes verdelen.
De leerlingen komen met drie typen oplossingen (zie Van Galen e.a., 1985):

- oplossingen die verwijzen naar het één voor één uitdelen van de snoepjes (zie afbeelding 1)
- oplossingen waar het geheel in drie gelijke groepen wordt opgedeeld (zie afbeelding 2)
- oplossingen waarbij de leerlingen groepjes van drie maken (zie afbeelding 3).

In de eerste oplossing denken de leerlingen duidelijk aan de activiteit van het verdelen. In de tweede oplossing laten de leerlingen zich leiden door het gegeven dat de kinderen uiteindelijk drie even grote porties moeten krijgen. In de derde oplossing realiseren de leerlingen zich waarschijnlijk dat elke verdeelronde drie snoepjes kost. Zij maken van de verdelingsdeling in feite een verhoudingsdeling en stellen zich de vraag: Hoeveel keer gaat 3 in 36?

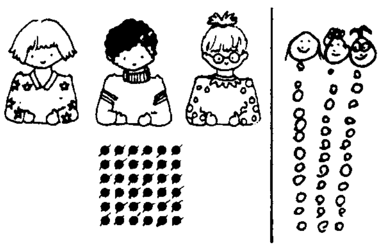
Het plaatje levert ideeën op

We zien hier dat de leerlingen één contextprobleem op drie verschillende manieren interpreteren. Dat heeft vermoedelijk ook te maken met het feit dat opgaven als 36 : 3 niet tot het standaardrepertoire behoren van leerlingen van groep vijf. De leerlingen zijn daarom genoodzaakt zelf een oplossingsmethode te bedenken. Het feit dat de leerlingen de tekening van de 36 snoepjes kunnen gebruiken helpt natuurlijk wel. De getekende snoepjes bieden de gelegenheid tot het één voor één wegstrepen, waarmee het één voor één uitdelen kan worden uitgebeeld. Al moet je dan wel bijhouden hoeveel ieder krijgt. De leerling van wie we de oplossing in afbeelding 1 zien heeft de drie kinderen nagetekend en systematisch bijgehouden wie de weggestreepte snoepjes kreeg. Een andere mogelijkheid zien we in afbeelding 2 waar het plaatje van de snoepjes wordt gebruikt om een derde deel van 36 visueel te bepalen. Bovendien biedt het patroon tal van mogelijkheden voor het maken van groepjes van drie (zoals bijvoorbeeld in afbeelding 3). Zo zien we dat de getekende snoepjes de leerlingen de gelegenheid bieden om allerlei contextgebonden strategieën op papier uit te voeren.
Verder speelt ook de getalkennis van de leerling een belangrijke rol bij het oplossen van het snoepjesprobleem. De meer getalvaardige leerlingen kunnen gemakkelijk groepjes van zes (= 2 x 3) of groepjes van twaalf (= 4 x 3) herkennen. Als ze wat verder zijn zullen ze daar zelfs geen plaatjes meer voor nodig hebben. Dan kunnen de leerlingen gebruik maken van 36 = 6 x 6 èn 6 = 2 x 3, of van 36 = 3 x 12, of van 36 is 10 x 3 en dan nog 2 x 3.

Wiskundige interpretatie is essentieel

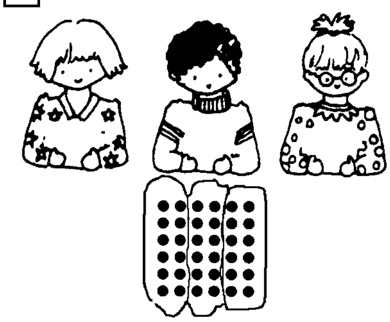
Dit voorbeeld onderstreept dat het wiskundig interpreteren van de situatie een essentiële stap is in het oplossingsproces. We zien dat leerlingen hetzelfde contextprobleem verschillend kunnen

1



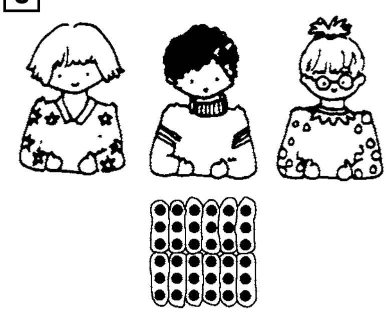
36 snoepjes verdelen door één voor één uitdelen

2



36 snoepjes verdelen door het geheel in drieën te delen

3



36 snoepjes verdelen door groepjes van 3 af te passen

Jasper Oostlander

Snoepjes verdelen. Zo'n contextopgave kan tot heel verschillende interpretaties leiden.

interpreteren. Daarom is het van belang dat de bespreking van zo'n opgave zich niet beperkt tot het uit te voeren rekenwerk, maar dat in de les ook wordt besproken hoe je van de context tot een bepaalde berekening komt. Anders bestaat namelijk het gevaar dat de leerlingen langs elkaar heen praten en dat een deel van de leerlingen gaat denken dat je bij contextvraagstukken zo snel mogelijk naar het rekenwerk moet overstappen. Door aandacht te besteden aan de wiskundige interpretatie van de context wordt recht gedaan aan wat bedoeld wordt met ‘realistisch’. Dat woord verwijst naar ‘zich realiseren’. Hier dienen de leerlingen zich te realiseren waar de getallen en de bewerkingen voor staan en wat ze in de context betekenen.
We moeten er dan wel voor oppassen dat de leerlingen niet te ver afdwalen en er allerlei zaken bijhalen die niet echt met het probleem te maken hebben. Het gaat tenslotte om het interpreteren van de context vanuit een wiskundig perspectief.
Nu is het wel zo dat interpretatieverschillen sneller naar voren komen wanneer we de leerlingen contextopgaven voorleggen waar ze nog geen standaardoplossing voor hebben. Maar ook als het oplossen een stadium van routinevorming heeft bereikt, lijkt het van belang na te gaan of de leerlingen zich werkelijk verplaatsen in de situatie en zich niet door oppervlakkige kenmerken laten leiden bij het kiezen van een bewerking.

Routine-oplossingen

Wanneer de leerlingen eenmaal een staartdelingsalgoritme onder de knie hebben lijkt het vanzelfsprekend dat ze ook weten wanneer ze dat kunnen gebruiken. Onderzoek van Hart (1981) heeft echter laten zien dat veel leerlingen (van toen) het helemaal niet vanzelfsprekend vonden om een staartdeling te gebruiken bij een opgave van het type:

Een vrachtauto rijdt met een snelheid van 75 kilometer per uur.
Hoe lang doet hij over 1200 kilometer?

Jasper Oostlander

Een klassengesprek over de wiskundige interpretatie van een contextopgave is van groot belang.

Het bleek dat veel leerlingen ervoor kozen om deze opgave met herhaald aftrekken op te lossen. Blijkbaar realiseerden ze zich niet dat je hier ook een staartdeling kunt gebruiken. We mogen aannemen dat de Nederlandse leerlingen van nu, die de staartdeling hebben geleerd via progressief schematiseren (dat op herhaald aftrekken gebaseerd is), eerder in staat zullen zijn dit soort situaties te herkennen als situaties waarin ze de staartdeling kunnen gebruiken. Toch kunnen we ons afvragen of dat nog steeds zo is wanneer de staartdelingsprocedure routine is geworden.
Mij lijkt het zeker van belang dat de leerlingen ook in die fase met een zekere regelmaat wordt gevraagd uit te leggen wat de gekozen bewerking te maken heeft met het contextprobleem dat moet worden opgelost. Kunnen de leerlingen bijvoorbeeld uitleggen waarom je het vrachtauto-probleem met een staartdeling zou gaan oplossen?

Vooral bij niet-standaard-opgaven ontstaan interpretatie-verschillen

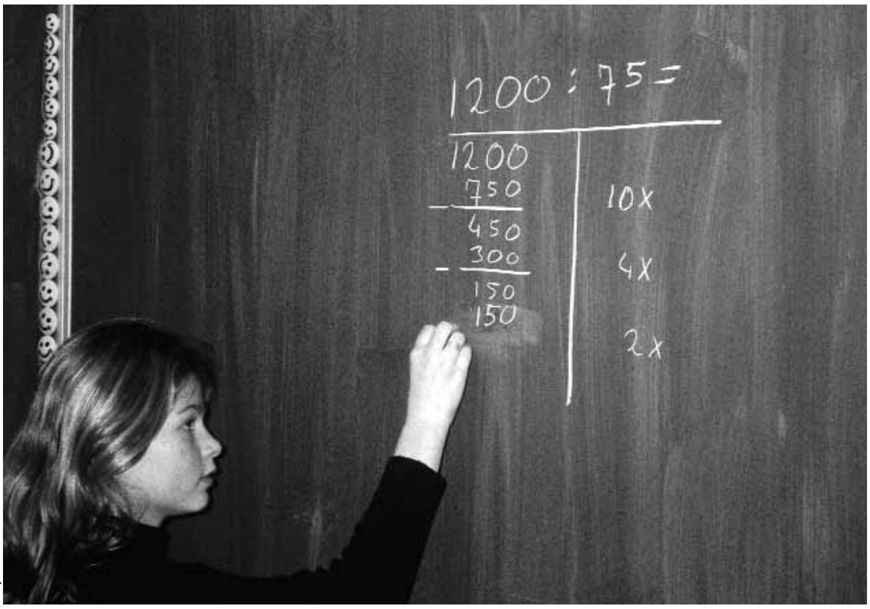
Contexten vergelijken

Ook zou de leerlingen kunnen worden gevraagd om uit te leggen hoe de oplossing van het vrachtauto-probleem samenhangt met de oplossing van een contextprobleem als:

Op een kwekerij moeten 1200 jonge plantjes worden verdeeld over een stukje grond van 75 vierkante meter. Hoeveel plantjes komen er op elke vierkante meter?

Bij deze vergelijking gaat het om meer dan alleen het wiskundig interpreteren van de contextopgave, de leerling moet deze twee situaties ook aan elkaar relateren. Hier hebben we te maken met een opdeelsituatie en een verdeelsituatie die beiden met hetzelfde deelalgoritme worden opgelost. Dus moet worden uitgezocht hoe het kan dat twee inhoudelijk verschillende contextproblemen met hetzelfde algoritme kunnen worden opgelost. Dit heeft te maken met het feit dat je soms nog een tussenstap maakt en uiteindelijk voor een andere bewerking kiest dan degene die uit de wiskundige interpretatie van de context voortvloeit.

Ik zal dit toelichten aan het kralenprobleem van het begin. Iemand kan dat



Jasper Oostlander

Het moderne deelalgoritme kan zowel in een opdeel- als in een verdeelsituatie ingezet worden.

probleem bijvoorbeeld interpreteren als een afhaalsituatie die neerkomt op 23 - 18, maar zich realiseren dat 18 en 23 dicht bij elkaar liggen en dat je 23 - 18 ook kunt uitrekenen door je af te vragen hoeveel het verschil is tussen 18 en 23. Uiteindelijk wordt het contextprobleem dat is geïnterpreteerd als 23 - 18 dan opgelost met de bewerking 18 + ... = 23, door gebruik te maken van het inzicht dat het oplossen van 23 - 18 = ... en van 18 + ... = 23 op hetzelfde neerkomt.
Een leerling ontdekt dat de vrachtwagenopgave en de plantjesopgave met hetzelfde algoritme kunnen worden uitgerekend wanneer hij zich realiseert dat er een samenhang bestaat tussen ‘Hoeveel keer past 75 op 1200?’ en ‘Als ik 1200 in 75 groepjes verdeel, hoeveel komt er dan in elk groepje?’ Het aardige is dat dit type relatie impliciet aan de orde komt wanneer je de oplossingen van het snoep-verdeel-probleem vergelijkt. Van een klassengesprek over de oplossingen waar de leerlingen zelf mee komen (zie afbeelding 1 tot en met 3) kunnen de leerlingen ook veel leren over de samenhang tussen verdelen, opdelen en vermenigvuldigen.

Conclusie

Bovenstaande voorbeelden laten zien dat de wiskundige interpretatie van contextopgaven niet voor zich spreekt. Dezelfde contextopgaven worden door verschillende leerlingen op verschillende manieren geïnterpreteerd, zeker als deze opgaven nieuw zijn voor de leerlingen. Dit kan tot problemen leiden wanneer het klassengesprek beperkt blijft tot het bespreken van een specifieke rekenkundige uitwerking, zonder dat wordt toegelicht hoe die past bij een bepaalde interpretatie, en zonder dat andere interpretaties van de contextopgave aan de orde komen. Voor de leerlingen die een andere interpretatie in gedachten hadden, kan dit ertoe leiden dat hen ontgaat wat de besproken oplossing met het probleem te maken heeft. Voor deze leerlingen is er dan geen sprake meer van het oplossen van een contextprobleem, maar van rekenen naar aanleiding van een contextprobleem zonder dat duidelijk is wat het rekenwerk met de context te maken heeft. Iets dergelijks kan zich ook voordoen als de opgaven niet nieuw zijn, maar tot een gangbaar repertoire zijn gaan behoren en routinematig worden opgelost. Een deel van de leerlingen realiseert zich niet (meer) hoe de berekening samenhangt met de context. Regelmatig expliciet vragen naar die samenhang kan ervoor zorgen dat de leerlingen bewuster over die samenhang gaan nadenken, waardoor het oplossen van contextopgaven meer het karakter krijgt van betekenisvol rekenen.

Plaatjes en schema’a

Tenslotte wil ik nog wijzen op de rol die plaatjes en schema's kunnen spelen. De getekende snoepjes van het snoep-verdeel-probleem, zijn niet alleen een steun bij het oplossen. De getekende oplossingen van afbeelding 1, 2 en 3 zijn ook prima hulpmiddelen om aan anderen uit te leggen hoe je het probleem hebt geïnterpreteerd. In het geval van het kralensnoer, waarmee ik dit artikel opende, zou een plaatje of een schema ook goed kunnen helpen om duidelijk te maken hoe Suzanne en Dave de opgave interpreteerden. Bijvoorbeeld door een getallenlijn te tekenen en uit te leggen hoe die de situatie weergeeft. Of door een rij van 23 kralen te tekenen. Respectievelijk om te laten zien welke kralen je weghaalt om het snoer van te maken, of om te laten zien dat je het aantal kralen van het snoer en de beschikbare kralen met elkaar vergelijkt.

Zo kunnen de leerlingen plaatjes en schema's gebruiken om elkaar uit te leggen hoe ze de contextopgave interpreteren. Daarmee kunnen ze ervoor zorgen dat hun oplossing echt van betekenis is voor hun medeleerlingen. Bovendien kan dit ervoor zorgen dat ze gaan zien hoe de verschillende rekenkundige bewerkingen met elkaar samenhangen.

De auteur is hoogleraar van de NVORWO en werkzaam op het Freudenthal Instituut in Utrecht.

Noot:

1. De variatie van oplossingen die de leerlingen laten zien bij de opgave, ‘Een boek heeft 64 bladzijden. Ik heb er al 37 gelezen. Hoeveel moet ik er nog lezen?’ geeft hier een fraai voorbeeld van (zie Vuurmans, 1991). De leerlingen komen met een scala van oplossingen, met name allerlei varianten van sprongsgewijs bijtellen respectievelijk sprongsgewijs afhalen.

Literatuur

Galen, F. van, K. Gravemeijer, J. M. Kraemer, A. Meeuwisse and W. Vermeulen (1985). *Rekenen in een tweede taal*. Enschede: SLO.
Hart, K.M. (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. London: Murray.
Vuurmans, A.C. (Red.) (1991). *Rekenen tot honderd*. 's-Hertogenbosch: KPC.