

Rekenen met perspectief

Reken-wiskundeonderwijs dat leerlingen voorbereidt op de maatschappij van de 21^e eeuw

Koeno Gravemeijer

In dit artikel staat de vraag centraal, hoe het reken-wiskundeonderwijs zo kan worden ingericht dat we de leerlingen goed kunnen voorbereiden op de maatschappij van de toekomst, of – als we een voorbeeld nemen aan staatssecretaris Dekker – op die van 2032. De verwachting is dat er door robotisering wel allerlei banen zullen verdwijnen, maar dat er ook veel nieuwe bij zullen komen. Maar, als dat zo is dan moeten we de leerlingen van nu wel op die nieuwe banen voorbereiden. In dit verband wordt terecht gewezen op het belang van 21st century skills, ofwel de 21^e eeuwse vaardigheden. Maar ook de inhoud van het onderwijs zal moeten veranderen. Dit geldt zeker voor het reken-wiskundeonderwijs, omdat steeds meer reken-wiskundige bewerkingen door computers en gecomputeriseerde apparaten worden uitgevoerd. Ik bespreek hieronder eerst de 21^e eeuwse vaardigheden en daarna de leerstofinhoudelijke veranderingen.

21^e eeuwse vaardigheden

De 21^e eeuwse vaardigheden staan internationaal al langer op de agenda. Er zijn inmiddels tal van publicaties over verschenen, waarin skills worden genoemd als: kritisch denken, probleem oplossen, creativiteit, flexibiliteit, communiceren, samenwerken, omgaan met ICT. En het reken-wiskundeonderwijs lijkt de plaats bij uitstek om aan 21st century skills te werken. Immers, *“In de rekenwiskundeles leren kinderen een probleem wiskundig op te lossen en een oplossing in wiskundetaal aan anderen uit te leggen. Ze leren met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen. Het uitleggen, formuleren en noteren en het elkaar kritiseren leren kinderen als specifiek wiskundige werkwijze te gebruiken om alleen en samen met anderen het denken te ordenen, te onderbouwen en fouten te voorkomen.”* Althans, zo staat het in het voorwoord bij de kerndoelen¹. In de praktijk blijkt het echter uitermate lastig te zijn om het hierboven geschetste, probleem-georiënteerde, interactieve reken-wiskundeonderwijs te realiseren.

Daar staat tegenover dat internationaal onderzoek wel al veel aanwijzingen heeft opgeleverd over wat daar voor nodig is. Dat betreft onder andere,

1. de verandering van het didactisch contract
2. het stimuleren van taakmotivatie
3. het cultiveren van wiskundige interesse
4. het doordenken van het hypothetisch leertraject

1. Didactisch contract

Om duidelijk te maken wat een didactisch contract is, maak ik even een uitstapje naar een situatie buiten de school. Stel u loopt in Utrecht en iemand spreekt u aan met de vraag: ‘Kunt u mij zeggen waar de Kerkdwaarsstraat is?’ Nu weet u dit toevallig, dus u zegt: ‘De Kerkdwaarsstraat, dan moet u recht door tot de tweede stoplichten. Daar gaat u rechts. En dan neemt u de eerste links.’ En de voorbijganger antwoordt: ‘Oké, prima: Rechtdoor tot de tweede stoplichten, en daar naar rechts. En dan de eerste links. Goed zo, andere vraag: Kunt u nu ook vertellen waar de Middenweg is?’ Dan zou u toch een

beetje raar opkijken. Maar in de klas is zo'n interactie heel gewoon. De leraren stellen allerlei vragen waarvan ze de antwoorden weten. En de leerlingen weten dat ook en proberen de antwoorden te geven die de leraar verwacht. Men noemt dit geheel van onderlinge verwachtingen en verplichtingen van leraar en leerlingen wel het didactisch contract. In het gangbare didactisch contract wordt van de leraar verwacht dat hij of zij uitleg geeft en van de leerlingen wordt verwacht dat zij reproduceren wat hen eerder is voorgedaan. Probleemgeoriënteerd onderwijs vraagt een heel andere rolverdeling. Dan wordt van de leerlingen verwacht, dat ze zelf nadenken, hun oplossingen uitleggen, dat ze proberen anderen te begrijpen, vragen om verheldering en zo nodig zaken ter discussie stellen. Van de leraren wordt verwacht dat ze niet vertellen hoe de opgaven opgelost moeten worden, maar opdrachten aanbieden en vragen stellen. Opdrachten en vragen, die de leerlingen stimuleren tot nadenken en het uitbouwen van hun kennis. Maar leerlingen schakelen niet zomaar om. En wanneer ze onder het oude contract blijven opereren, komt er van het probleem-georiënteerde onderwijs weinig terecht. Een verandering van didactisch contract is niet zo gemakkelijk te realiseren. Het 'contract' is namelijk geen expliciete afspraak. Het is een verzameling onuitgesproken ideeën over hoe het er in onderwijs aan toegaat. De ideeën van de leerlingen zijn gebaseerd op hun ervaringen. Om hun ideeën te veranderen, zullen ze nieuwe ervaringen moeten opdoen. Ze zullen moeten ervaren dat de leraar het waardeert als ze met eigen oplossingen komen, uitleg geven, vragen stellen etc. Leraren kunnen een probleemgeoriënteerde klassencultuur verder bevorderen door de manier waarop ze klassendiscussies voeren. Door:

- Om uitleg te vragen
 - Kun je uitleggen hoe je daaraan komt?
- Leerlingen uit te nodigen vragen te stellen;
 - Wie heeft een vraag voor Tim?
- Het probleem door te geven
 - Wie kan Paula's vraag beantwoorden?
- Om een persoonlijk oordeel te vragen
 - Anna zegt dat het € 16,25 kost, zijn jullie het daarmee eens?
- Te bevorderen dat de leerlingen luisteren en proberen te begrijpen wat er wordt gezegd
 - Heb je begrepen wat zij zei, kun je het mij uitleggen?

2. Motivatie/interesse

Het participeren in probleemgeoriënteerd onderwijs vraagt zoals we hierboven zagen een actieve inbreng van de leerlingen. Maar die moeten niet alleen weten dat dit van hen wordt verwacht, maar dit zelf ook willen. De motivatie van leerlingen kan echter sterk variëren. Van belang is hier het verschil tussen taak- en egomotivatie. Taakgemotiveerde leerlingen zijn geneigd zich in te zetten voor het vinden van een oplossing voor het probleem. Egogemotiveerde leerlingen zijn meer bezig met hoe ze door hun klasgenoten worden gezien. En daar richten ze hun handelen op. Dit kan in de praktijk betekenen dat ze liever niet aan een opgave beginnen, om zo het risico te vermijden dat ze 'afgaan' als het niet lukt. Maar hoewel hier waarschijnlijk sprake is van verschillen in aanleg, blijkt dat taak- en ego-motivatie ook beïnvloedbaar zijn. Ego-motivatie wordt versterkt, wanneer de leerprestaties regelmatig vergeleken worden met die van anderen of met een of andere externe norm. Om taak-motivatie te bevorderen is het belangrijk dat de leerlingen hun eigen ontwikkeling en hun eigen prestaties gaan waarderen. Net als een amateur musicus, die blij is wanneer hij of zij een nieuw stuk onder de knie heeft

gekregen. Leraren kunnen een belangrijke rol spelen bij het stimuleren van een dergelijke houding. Uiteraard is ook van belang dat de taken binnen het bereik van de leerlingen liggen; het gaat om de juiste balans tussen competentie en uitdaging.

3. Wiskundige interesse

Een derde aspect dat een rol speelt in probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs is wiskundige interesse, interesse in 'de wiskunde om de wiskunde'.

Probleemgeoriënteerd reken-wiskundeonderwijs veronderstelt dat de leerlingen rekenen-wiskunde leren via het zelf oplossen van problemen. Maar dan is het niet voldoende dat de leerlingen oplossingen vinden. Ze moet ook nadenken over wat die oplossingen wiskundig betekenen en zichzelf vragen stellen als:

- Werkt dit altijd?
- Kan ik dat bewijzen?
- Kan het ook handiger?
- Kan ik dit ook ergens anders toepassen?

Alleen dan kunnen ze in wiskundige zin vooruitgang boeken. Ook hier speelt de leraar weer een centrale rol. Kern hierbij is dat de leraar oprechte belangstelling heeft voor het denken van de leerling. Wanneer leerlingen ervaren dat leraren echt geïnteresseerd zijn in hoe zij denken, dan zijn ze ook bereid daarover te praten en een extra inspanning te leveren.

4. Hypothetisch leertraject

De rol van de leraar verschuift zoals we hierboven zagen van uitleggen naar het aanbieden van opdrachten en het stellen van vragen. Die moeten de leerlingen stimuleren tot nadenken, en ze daarmee op weg helpen de beoogde kennis op te bouwen. Dat vraagt een specifieke planning, gericht op dat nadenken. De leraar moet zich afvragen, hoe de leerlingen zullen redeneren als ze deze taak uitvoeren. En, helpt dit redeneren bij het bereiken van de beoogde leerdoelen? Men spreekt in dit verband van een hypothetisch leertraject. Dit leertraject is hypothetisch omdat er vooraf geen zekerheid is dat de leerlingen dit traject daadwerkelijk zo zullen doorlopen. De leraar moet tijdens de les daarom proberen te ontdekken of de leerlingen wel zo denken als hij/zij verwachtte. Wanneer dit niet het geval is zal het leertraject moeten worden aangepast. Bijvoorbeeld door aan te sluiten op de ideeën waar de leerlingen zelf mee komen en te proberen van daaruit de gewenste kennis op te bouwen.

De inhoud van rekenonderwijs voor de 21^e eeuw

Er is op dit moment veel discussie over hoe het rekenen op het 'functionele' 2f- en 3f-niveau moet worden getoetst. Vooral het gebruik van contexten en van de rekenmachine roept veel discussie op. Toch wordt het steeds belangrijker om te bedenken hoe je rekenapparaten kunt inzetten om praktische rekenproblemen op te lossen. Een probleem lijkt te zijn dat niet iedereen hetzelfde onder "rekenen" verstaat. Dat zouden we kunnen oplossen door verschillende soorten rekendoelen te onderscheiden. Ik stel voor drie soorten rekendoelen te onderscheiden, *rekenvaardigheid*, *rekeninzicht* en *rekengebruik*. Rekenvaardigheid verwijst dan naar het produceren van correcte antwoorden bij kale rekenopgaven. Rekeninzicht zou je kunnen reserveren voor inzicht in rekenbewerkingen en de onderbouwing daarvan. Bij rekengebruik tenslotte gaat het niet om het rekenen zelf, maar om wat je ermee kunt doen. Daaronder valt het herkennen van situaties waar je rekenen kunt gebruiken, een probleem in een rekentaak kunnen vertalen en de antwoorden kunnen interpreteren en evalueren. Wanneer je met computers of gecomputeriseerde apparaten werkt, heb je met name rekeninzicht en

rekengebruik nodig. Op het eerste gezicht lijkt het dan alsof je geen “gewone” rekenvaardigheid meer nodig hebt, maar dat is niet zo. In de eerste plaats hebben we het hier over doelen en niet over de weg ernaar toe. Om die doelen te bereiken zal je ook rekenvaardigheid moeten ontwikkelen. Bovendien heb je rekenvaardigheid nodig om de antwoorden die apparaten produceren te kunnen evalueren. Maar dat is wel een ander soort rekenvaardigheid dan die van het vlot uitvoeren van standaardprocedures. Ik zal dit hieronder verder toelichten.

Getalrelaties

Globaal rekenen houdt in dat je de getallen aanpast om de berekening te vereenvoudigen, zodat je kunt controleren of het antwoord juist kan zijn. De instelling om antwoorden globaal te controleren is op dit moment onvoldoende ontwikkeld. Zo bleken veel leerlingen bij het PPO 4 eenvoudige vermenigvuldigingsopgaven foutief uit het hoofd uit te rekenen, maar niet op te merken dat de antwoorden nooit konden kloppen. In het voortgezet onderwijs werd tot voor kort niet meer gerekend. Zodra de leerlingen de rekenmachine mochten gebruiken, stopten ze met rekenen. Blijkbaar hadden ze geen automatisme ontwikkeld om antwoorden altijd globaal te controleren.

Misschien hadden ze ook gewoon de vaardigheid niet om globaal te kunnen rekenen. De basis daarvoor ligt in het *flexibel omgaan met getalrelaties, rekenen met nullen en eigenschappen van rekenoperaties*. Ik zal dit illustreren met een eenvoudig voorbeeld. Bij een opgave als 4×27 kan een leerling bedenken dat het antwoord ruim $4 \times 25 = 100$ is, een ander dat het minder is dan $4 \times 30 = 120$. En weer een andere leerling realiseert zich, dat er $2 \times 54 = 108$ uitkomt. Idealiter zou het zo moeten zijn dat leerlingen *die* getalrelaties gebruiken waar zij vertrouwd mee zijn. Wanneer we willen dat leerlingen wat dit betreft goed beslagen ten ijs komen, dan moeten we investeren in het inoefenen van, en spelen met, getalrelaties die je veel kunt gebruiken. Voor vermenigvuldigen kunnen we bijvoorbeeld denken aan veelvouden van 25, 75, 125 en dergelijke en het kunnen relateren van deze getallen aan kommagetallen, breuken en procenten. Het gaat uiteindelijk om netwerken van getalrelaties op basis waarvan leerlingen bijvoorbeeld kunnen bedenken dat $1,25 \times 4 = 5$, omdat $4 \times 25 = 100$ is en $4 \times 0,25$ dus gelijk is aan 1, of door te bedenken dat $4 \times 1,25$ gelijk is aan $4 \times 1\frac{1}{4}$. Naast de getalrelaties moeten de leerlingen voor dit soort rekenen ook de eigenschappen van rekenoperaties flexibel kunnen gebruiken. Zoals de commutatieve eigenschap ($1,25 \times 4 = 4 \times 1,25$), de associatieve eigenschap ($4 \times 30 = 4 \times 3 \times 10 = 12 \times 10$) en de distributieve eigenschap ($4 \times 125 = 4 \times 100 + 4 \times 25$).

Bovengenoemde rekenvaardigheden worden niet ontwikkeld in een programma dat zich uitsluitend richt op het snel en routinematig oplossen van rekenopgaven met behulp van standaardprocedures. Daar is ander rekenonderwijs voor nodig, maar daar kunnen we wel al een start mee maken.

Tot slot

In de discussie over het onderwijs voor de toekomst, krijgt het reken-wiskundeonderwijs weinig aandacht. Alsof we klaar zijn voor de toekomst nu we doorgaande leerstoflijnen hebben. Maar dat is niet het geval. Er zal nog het nodige werk verzet moeten worden om het reken-wiskundeonderwijs zodanig vorm te geven dat het bijdraagt aan de ontwikkeling van 21st century skills. Bovendien zal de *inhoud* van het reken-wiskundeonderwijs moeten worden aangepast aan wat de maatschappij van de 21^e eeuw vraagt. Ik noemde in dit verband de uitbreiding van de conventionele rekenvaardigheid met rekeninzicht en rekengebruik. Het daarmee samenhangende

globaal rekenen, vraagt erom flexibel te kunnen omgaan met getalrelaties, rekenen met nullen en eigenschappen van rekenoperaties. Daarnaast zal onderzocht moeten worden welke andere wiskundeleerstof in het funderend onderwijs aan de orde moet komen. Daarbij kunnen we bijvoorbeeld denken aan basale inzichten op het gebied van statistiek en variabelen en functies, zaken die allemaal van grote betekenis zijn in een gecomputeriseerde maatschappij.

Noot

1. Kerndoelen rekenen-wiskunde: <http://tule.slo.nl/RekenenWiskunde/F-KDRekenenWiskunde.html> / karakteristiek