
Het belang van onderliggende wiskundige ideeën

Een uitwerking voor onderwijs in statistiek

GEEKE BRUIN-MUURLING EN IRENE VAN STIPHOUT

JULI 2017

Technologische vooruitgang en globalisering veranderen onze maatschappij snel en hebben onder andere invloed op onze manier van werken, communiceren en samenleven. Deze veranderingen vragen om aanpassingen van het onderwijs om kinderen goed te blijven voorbereiden op hun toekomst. Hoe die toekomst eruit gaat zien weet niemand, wel is duidelijk dat wiskunde hierin een andere rol zal spelen. In dit stuk verkennen we wat dit betekent voor het wiskunde-onderwijs in het algemeen en vervolgens verkennen we wat deze focus voor het statistiek-onderwijs zou kunnen betekenen.

INLEIDING

De laatste decennia zijn er veel ontwikkelingen geweest op het gebied van technologie en digitalisering en de rol van wiskunde daarin. Ook in de statistiek is de toegankelijkheid van geavanceerde statistische technieken enorm vergroot door de opkomst van gebruikersvriendelijke statistische software. Deze ontwikkeling en de grotere beschikbaarheid van data hebben een aanzienlijke invloed gehad op het gebruik

van statistiek in onze maatschappij. Dat betekent dat er in het dagelijks leven steeds meer een beroep wordt gedaan op het aannemen van een kritische houding ten opzichte van statistiek: zowel voor het beoordelen van argumenten gebaseerd op statistische analyses als bij het zelf uitvoeren van statistiek.

Wij zijn van mening dat die veranderde rol van de wiskunde, naast de aandacht voor meer algemene vaardigheden die vaak gevangen worden onder de term 21st century skills, vraagt om een vakinhoudelijke perspectiefwissel. We betogen dat het voor het onderwijs in het algemeen, en voor het wiskunde-onderwijs in het bijzonder, van belang is om meer aandacht te besteden aan de onderliggende en verbindende wiskundige ideeën.

ONDERLIGGENDE IDEEËN

De snelle veranderingen in de maatschappij vragen om onderwijs dat leerlingen handvatten biedt om met die veranderingen mee te gaan en om zich daarin staande te houden. Meer dan ooit wordt van burgers gevraagd om *een leven lang* nieuwe kennis en vaardigheden op te doen en te ontwikkelen. Daarnaast is en blijft het van belang om de steeds complexer

en minder overzichtelijk wordende maatschappij te begrijpen en daarin een weg te vinden. Wat betekenen deze veranderingen voor de keuze in kennis en vaardigheden die het onderwijs aan leerlingen mee wil geven?

Wat betreft de eerste ontwikkeling, een leven lang leren, zien we twee perspectieven: namelijk het ontwikkelen van een netwerk van ideeën om nieuwe kennis aan te verbinden en het leren van efficiënte manieren om nieuwe kennis en vaardigheden te verwerven. Het volgende voorbeeld van de afwegingen bij het leren programmeren illustreert deze principes. Leren programmeren gebeurt aan de hand van een specifieke taal. Daarbij kan de focus gelegd worden op het eigen maken van de commando's die horen bij die taal. Vanuit een langere termijn perspectief, waarin ervan wordt uitgegaan dat er nog andere programmeertalen geleerd zullen moeten worden, is er ook een andere focus nodig. Dan biedt kennis van de typen bouwblokken waaruit een programmeertaal bestaat kapstokken om de nieuwe taal sneller te doorgronden en daarin vaardig te worden. Denk hierbij bijvoorbeeld aan het mechanisme van 'het herhalen op bepaalde voorwaarden'. Dit idee van een conditionele loop komt in veel programmeertalen voor, maar kent wel telkens een andere schrijfwijze. De leren-programmeren-taal Scratch heeft dit soort ideeën, die de basis van programmeren vertegenwoordigen, heel mooi visueel gemaakt. Zie Figuur 1. Focus op ideeën in plaats van alleen technieken biedt een betere kapstok voor het leren van nieuwe programmeertalen. Daarnaast heeft deze focus op ideeën een tweede effect. Het zorgt er namelijk ook voor dat leerlingen zich bewust worden van een andere manier om tegen leren aan te kijken. Namelijk niet alleen als het leren van een techniek. Die andere manier van tegen leren aankijken zorgt ervoor dat ook andere nieuwe dingen efficiënter doorgrond kunnen worden.

Dit voorbeeld laat zien dat het gaat om tijdloze en toepassingsonafhankelijke mechanismen, structuren en ideeën. Dit vormt een uitbreiding op het idee van een feitennetwerk als kapstok voor het leren. Juist begrip van onderliggende ideeën biedt een rode draad in kennisverwerving en het zoeken naar zulke rode draden is een uiterst efficiënte manier van verwerving van kennis en vaardigheden.

Met betrekking tot de tweede ontwikkeling, de complexere wordende maatschappij, zien we twee perspectieven op de noodzaak de maatschappij te blijven begrijpen. Voor de individuele burger is er een persoonlijk belang in het begrijpen van de maatschappij. Bijvoorbeeld bij het kunnen volgen van het nieuws, het kunnen omgaan met geld, het relativeren van



Figuur 1: Screenshot van de programmeertaal scratch waarin programma's kunnen worden gebouwd aan de hand van verschillende, in elkaar passende delen.

reclame en het nemen van beslissingen zoals de keuze voor een zorgverzekering of hypotheek. Voor de maatschappij als geheel is er het belang van eenheid. Wanneer groepen mensen de snelheid en de complexiteit van de maatschappij niet aankunnen, daardoor afhaken en zich slachtoffer voelen, ontstaat een segregatie die onwenselijk is. Dat begrijpen van de maatschappij dat zowel vanuit individueel perspectief als vanuit maatschappijke perspectief nodig is, begint bij het hebben van een kritische houding.

Samengevat stellen we dat meer dan ooit het verwerven van overkoepelende ideeën en kerninzichten, als kapstokken voor verder leren en als basis van kritisch denken, het doel zou moeten zijn van het onderwijs. Wat dat concreet kan betekenen in een gebied als het statistiekonderwijs wordt hieronder uitgewerkt.

ONTWIKKELINGEN IN DE STATISTIEK

Statistiek heeft een bijzondere positie in de toegenomen digitalisering. De toegankelijkheid van vrij beschikbare geavanceerde statistische technieken is enorm toegenomen. Softwarepakketten als Microsoft Excel, SPSS en open source pakketten als *R* zijn vaker, voor meer mensen en eenvoudiger toegankelijk. In een maatschappij waarin veel belang wordt gehecht aan cijfers (Blauw, 2016) is het daarom van belang om leerlingen zorgvuldig voor te bereiden op de rol die cijfers spelen. Want, zoals de Amerikaanse journalist Gregg Easterbrook ooit zei:

“Torture numbers, and they’ll confess to anything.”

In het uitvoeren van statistische analyses is de afgelopen eeuw een enorme ontwikkeling geweest. Zo

ging het CBS in 1916 over op mechanisatie bij de verwerking van statistische gegevens om in de jaren '60 over te gaan op automatisering (Erwich & Van Maarseveen, 1999, p. 12).

Sinds die tijd is statistiek krachtiger geworden en is de toegankelijkheid toegenomen. We bedoelen daarmee dat waar de uitvoering van statistische analyses aanvankelijk werd gedaan door experts in gespecialiseerde afdelingen, statistische software nu voor iedereen beschikbaar is. Dat betekent dat waar de meeste mensen vroeger vooral de consument van statistiek waren en het analyzewerk aan experts (statistici, wiskundigen) overlieten, nu een generatie is opgestaan voor wie het zelf uitvoeren van statistische analyses steeds gebruikelijker is. Zo wordt op universiteiten en hogescholen onderzoek in de opleiding ondersteund met statistische analyses in programma's als MS Excel of SPSS. Statistiek is daarmee niet alleen meer voor statistici weggelegd. Statistische technieken hebben hun weg gevonden naar vele verschillende vakgebieden in alle richtingen (alpha, bèta en gamma). Dat heeft verschillende consequenties.

De eerste is dat statistiek niet alleen meer door wiskundige specialisten wordt uitgevoerd, terwijl statistiek zeker niet minder complex geworden is. Waar wiskundigen statistiek beschouwen als een ingewikkeld vakgebied, waar je makkelijk redeneer- en denkfouten maakt, zien we in andere vakgebieden soms een onderschatting van de moeilijkheid van statistiek (Ioannidis, 2005). Die onderschatting is er zeker wanneer het bedrijven van statistiek gericht is op de beheersing van de statistische software en het uitvoeren van procedures die in het betreffende vakgebied gemeengoed lijken te zijn geworden. Onder dergelijke statistische praktijken lijkt niet altijd meer een stevige basis van begrip te liggen. Software biedt de mogelijkheid om statistische analyses uit te voeren zonder dat gecheckt wordt of de data geschikt zijn voor die analyse. In dit licht kan het onderzoek worden geplaatst naar de statistische fouten die in veel sociaalwetenschappelijk onderzoek worden gemaakt (Hoekstra, 2009). De gebruiksvriendelijkheid van statistische software lijkt bij te dragen aan een onderschatting van de moeilijkheid van de onderliggende wiskunde en een overschatting van het eigen kunnen. Het gevolg is dat er een grotere spreiding lijkt in de kwaliteit van statistische analyses is dan voorheen.

Een tweede consequentie is dat mensen vaker worden geconfronteerd met de resultaten van statistisch onderzoek en dat die resultaten een steeds grotere rol spelen in beslissingen. De impact die statistiek daarmee heeft, ook op het individu, wordt groter (Blauw,

2016). Statistiek speelt bijvoorbeeld een rol in de politiek (Levels, 2016), rechtspraak (Derksen & Ey-mers, 2006) en in de behoefte aan evidence based aanpakken in het onderwijs (Hattie, 2008, 2012) en de zorg (Cox et al., 2012).

Voor het omgaan met de wisselende kwaliteit van statistische analyses en de maatschappelijke impact van cijfers zien we een duidelijke rol voor het onderwijs. Voor een burger is het belangrijk dat hij zich een beeld kan vormen van de kwaliteit van voorliggend onderzoek. Dat vraagt om een kritische houding en een oog voor punten waaraan je kwaliteit of juist slechte kwaliteit kunt herkennen. Diezelfde kritische houding is tevens nodig voor degenen die zelf statistische analyses uitvoeren om meer kwaliteit te leveren in het werk.

Samengevat zien we ook op het gebied van de statistiek het belang van het leren van onderliggende ideeën als kern van een efficiënte kennis- en vaardighedenbasis en als grondslag voor een kritische houding. In dit geval is dat nodig om zowel de kwaliteit van statistische analyses die door steeds meer mensen worden uitgevoerd omhoog te trekken als om op een verstandige manier om te gaan met de resultaten van op statistiek gebaseerd onderzoek.

DOELBESCHRIJVINGEN

In het voorgaande hebben we geconcludeerd dat een focus op onderliggende principes en ideeën essentieel is in toekomstbestendig onderwijs. De vraag is vervolgens hoe dergelijke doelen het beste in het onderwijs meegenomen kunnen worden. Ook in het huidige onderwijs is er immers al aandacht voor conceptuele kennis en begrip. Daarvoor kijken we eerst naar de huidige beschrijving van dit soort meer overkoepelende doelen. Zie de voorbeelden in Figuur 2 en Figuur 3.

De manier waarop deze doelen in het huidige onderwijs zijn geformuleerd, bieden echter om twee redenen niet de basis die we zoeken voor onze genoemde focus op onderliggende principes en ideeën. De begrippen die worden gehanteerd zijn hiervoor nog te breed, zoals *passende vaktaal voor wiskunde herkennen en gebruiken voor het ordenen van het eigen denken* in het voorbeeld. Bovendien richten deze doelbeschrijvingen zich meer op het niveau van de metacognitieve vaardigheden. Hierin is ook de verandering van focus te herkennen die wij voorstaan. Wij doelen met onze onderliggende principes en ideeën op een meer inhoudelijke reflectie en niveauverhoging (Sfard, 1991). Dat wil zeggen dat

Domein A: Inzicht en handelen

Subdomein A1: Vaktaal wiskunde

De leerling kan

1. passende vaktaal voor wiskunde herkennen en gebruiken voor het ordenen van het eigen denken en voor uitleg aan anderen en wiskundetaal van anderen herkennen en beoordelen, evenals vaktaal omzetten naar taal die nodig is bij ondersteunende apparatuur (zoals de rekenmachine).

Subdomein A2: Herkennen en gebruiken wiskunde

De leerling kan

2. verbanden leggen tussen enerzijds probleemsituaties die al dan niet in een wiskundige context zijn gesteld en anderzijds wiskundige begrippen, verbanden, structuren en oplossingsprocedures.

De leerling kan

- 2.1 bij het oplossen van problemen de situatie vertalen naar een wiskundig model en daarbinnen zoeken naar geschikte oplossingsprocedures en deze toepassen en terugvertalen;
- 2.2 in verschillende situaties wiskundig gerelateerde informatie herkennen, interpreteren, gebruiken en toepassen in andere contexten.

Subdomein A3: Wiskundig redeneren

De leerling kan

3. reflecteren op eigen wiskundige activiteiten, die activiteiten beschrijven en die van anderen kritisch beoordelen.
4. het verschil benoemen tussen vermoeden, stelling, definitie en bewijs en een eenvoudig bewijs leveren vanuit basisdefinities.

Figuur 2: Deel van de beschrijving van domein A Inzicht en handelen in de tussendoelen (SLO).

Domein F: Informatieverwerking en onzekerheid

De leerling kan

18. h/v data verzamelen, ordenen, interpreteren en vergelijken en grafische representaties van data maken, ook met behulp van technologie.

De leerling kan

- 18.1 h/v grafische weergaven van data (tabel, diagram) aflezen en interpreteren;
- 18.2 h/v data verzamelen, ordenen, samenvatten en vergelijken met behulp van centrummaten en spreidingsmaten en daaruit conclusies trekken;
- 18.3 h/v bij datasets (van eenvoudige, praktische contexten) uitspraken over kansen beoordelen en voorspellingen doen;
- 18.4 h/v passende vaktaal herkennen en gebruiken bij het verwerken, aflezen, representeren en vergelijken van dataverzamelingen.

Figuur 3: Deel van de beschrijving van domein F Informatieverwerking en onzekerheid in de tussendoelen (SLO).

het begrijpen van onderliggende structuren en meer algemene ideeën, en daarmee niveauverhoging, door leerlingen en docenten als expliciete uitkomst van het leerproces wordt gezien. Dit vraagt om een inhoudelijke reflectie op de stof en op de opgaven die aan de orde zijn geweest, met als doel om tot diepere inzichten te komen over het onderwerp zelf en tot inzichten die verder reiken dan het onderwerp. Op die manier kunnen die ideeën verbindende elementen vormen tussen onderwerpen in de wiskunde.

DE ROL VAN CONCRETE CONCEPTUELE DOELEN IN HET ONDERWIJS

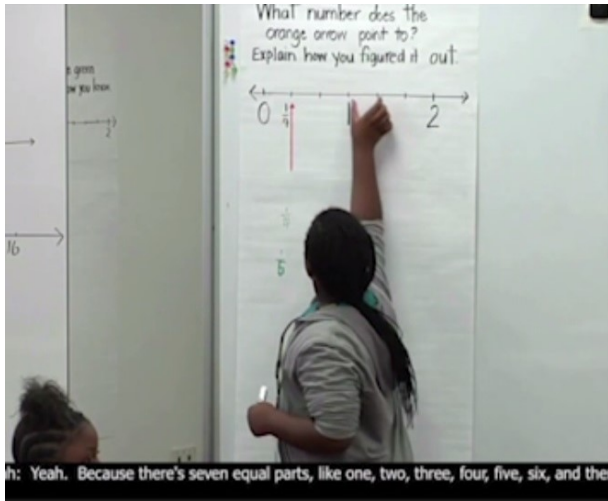
Het formuleren van onderliggende concepten als doel van onderwijs heeft een belangrijke rol in de praktijk van het lesgeven. In haar lezing tijdens de International Conference on Mathematics Education 2016 liet Deborah Ball een mooi voorbeeld zien van hoe

een les anders kan verlopen wanneer de docent naast vaardigheidsdoelen ook de onderliggende concepten als doel in zijn hoofd heeft. In de les die ze toonde, moeten leerlingen de breuk $\frac{1}{3}$ benoemen op een getallenlijn van 0 tot 2. Een van de leerlingen, Aniyah, legt uit hoe ze op haar antwoord van $\frac{1}{7}$ is uitgekomen. Zie Figuur 4. Ball heeft deze video aan vele docenten laten zien en zag een predominantie van de constatering dat $\frac{1}{7}$ een fout antwoord is. De docenten in haar onderzoek zagen in het algemeen niet welke conceptuele kennis Aniyah al wel heeft: het kunnen kiezen van een geheel, het kennen van het belang van intervallen van gelijke grootte, het tellen van de intervallen in plaats van de markeringen, en het kunnen noteren van een breuk.

Het onjuiste antwoord van Aniyah is logischerwijze het eerste dat opvalt. Gedacht vanuit het vaardigheidsdoel om een positie op de getallenlijn correct te kunnen benoemen, zal een uitleg zich waarschijnlijk richten op de procedure om tot het goede antwoord te komen: het tellen van het aantal gelijke intervallen tussen 0 en 1 en dit als noemer van de breuk te nemen. Om leerlingen die procedure aan te leren, kan een docent verschillende didactieken kiezen. In een meer traditionele aanpak zal de procedure worden voorgedaan. En in een meer sociaal-constructivistische aanpak zal de procedure met de leerlingen worden ontdekt.

Wanneer niet alleen uit wordt gegaan van het doel van die ene les, maar conceptuele doelen worden opgepikt van onderliggende wiskundige ideeën, zou een andere richting in de uitleg gekozen kunnen worden. Aniyah lijkt immers één concept nog niet volledig begrepen te hebben. Ze weet wel dat het belangrijk is om *een hele* te kiezen, maar begrijpt de impact daarvan nog niet. De docent zou hier dus met de leerlingen kunnen bespreken wat je nu precies als *hele* kiest en waarom. Hij of zij kan bespreken wat de invloed is van die keuze en waar dat nog meer een rol speelt. De leerlingen kennen dan waarschijnlijk al de situatie van $\frac{1}{3}$ deel van 30 kinderen, waar *de hele* de groep van 30 kinderen is. Terwijl in een andere situatie de hele alle leerlingen van de school zijn. Het hangt van de context af wat als geheel wordt beschouwd. Dit is een voorbeeld van waar het concept *eenheid* dat later bijvoorbeeld een rol speelt bij het metriek stelsel en het rekenen met procenten. In het metriek stelsel hangt het van de keuze van de eenheid af welk getal hoort bij een bepaalde lengte (bijvoorbeeld 1,68m of 168 cm).

Dit voorbeeld laat de invloed zien van het uitgaan van zowel vaardigheids- als conceptuele doelen. Met een dergelijke aanpak wordt leerlingen niet alleen ge-



Figuur 4: Uitleg van leerling Aniyah over de plaats van $\frac{1}{7}$ op de getallenlijn.

leerd de vaardigheid zelf aangeleerd, maar wordt er ook al een verbinding gelegd naar latere wiskundige onderwerpen. De door ons bedoelde conceptuele doelen beslaan dus begrip van de onderliggende structuur van het onderwerp zelf en de onderliggende ideeën die verder reiken.

De formulering van conceptuele doelen geeft docenten houvast om de les te sturen naar een meer conceptuele invulling. Het is daarbij cruciaal dat de doelen zich richten op het inhoudelijke niveau van tijdloze en toepassingsonafhankelijke ideeën. Het formuleren van een complete set van dergelijke doelen is een eerste stap. In het volgende geven we voorbeelden van onderliggende ideeën.

EEN VOORBEELD IN STATISTIEK

In de beschrijvende statistiek gaat het onder meer om het verkrijgen van overzicht in een grote hoeveelheid data (McClave et al., 2003). Zonder tussenkomst van technieken is het immers moeilijk om patronen te herkennen in grote hoeveelheden data. Door data te reduceren tot bijvoorbeeld enkele getallen of een grafische weergave, worden patronen zichtbaar. In dat reductieproces worden keuzes gemaakt. Die keuzes zijn soms gedreven door kennis van de situatie die onderzocht wordt, soms door wiskundige technieken.

Een van de algemene ideeën die hieronder ligt, is dat van de wisselwerking tussen complexiteit en precisie of detail in modelleerprocessen. De reductie van de informatie, het versimpelen, heeft een prijs, namelijk het verlies van detail van de data. Ditzelfde principe, van het betalen van een prijs voor versimpeling, is op veel plekken in de wiskunde terug te

vinden. Een voorbeeld is het kiezen van de graad van een polynoom bij ‘curvefitting’. Hier zien we het rekenwerk als de complexiteitsfactor: hoe hoger de graad, hoe nauwkeuriger de fit en hoe ingewikkelder het polynoom en dus het rekenwerk.

Dit principe betekent dat het nodig is precies in beeld te hebben wat er precies verloren is gegaan, zeker bij het trekken van conclusies. Wordt bijvoorbeeld in een onderzoek uitgegaan van een gemiddelde en de standaarddeviatie, dan gaat informatie over de symmetrie en de eentoppigheid van de data verloren. Onlangs publiceerden Matejka & Fitzmaurice (2017) nieuwe visueel aantrekkelijke datasets gebaseerd op het werk van Anscombe’s Quartet. Deze datasets verschillen enorm van vorm, van een puntenwolk in de vorm van een donut tot de vorm van een dinosaurus, maar hebben wel dezelfde kentallen hebben als gemiddelde, standaardafwijking en correlatie. Dit soort datasets laten zien dat waar deze kentallen een normale verdeling helemaal vastleggen, ze slechts een deel van het verhaal zijn bij andersoortige verdelingen. Dan is juist de informatie die buiten de kentallen ligt van belang.

Wanneer je zelf onderzoek doet kan dit reden zijn om de eigenschappen van de verdeling buiten de kentallen op voorhand te onderzoeken, voordat er gekozen wordt om met alleen gemiddelde en standaarddeviate te werken. Wanneer je een conclusie van een statistisch onderzoek moet beoordelen, is dit een indicatie van de kwaliteit van die conclusie. Wanneer deze uitgaat van een normale verdeling zonder dat daar ‘bewijs’ voor is, dan is dat een ‘red flag’ om nog een keer extra goed naar die conclusie te kijken.

Hetzelfde principe speelt ook in de verklarende statistiek. Meer variabelen maken een model in het algemeen ingewikkelder. De selectie van variabelen heeft te maken met kennis van de context. Het beslissen of dit een verstandige selectie was bij het interpreteren van de resultaten heeft zowel betrekking op contextuele kennis als op wiskundig inzicht. Hier hebben we dan bijvoorbeeld te maken met principes als signaal-ruis verhouding en de aard van betrouwbaarheidsintervallen.

De voorbeelden die we hier hebben besproken betreffen onderwerpen die in het huidige statistiekcurriculum terug te vinden zijn, maar krijgen een andere laag mee. Door deze conceptuele laag ontwikkelen leerlingen als het ware ‘red flags’ die hen helpen kritisch te staan tegenover hun eigen onderzoek en dat van anderen.

CONCLUSIE

We begonnen dit artikel met de noodzaak van conceptuele doelen om leerlingen weerbaar te maken zodat ze zich staande kunnen houden in de maatschappij van de toekomst. Dit lag zowel op het gebied van een leven lang leren als op de noodzaak van het hebben van een kritische houding om de maatschappij te kunnen begrijpen. We hebben ditzelfde meer concreet uitgewerkt voor het onderwerp statistiek. Daar is conceptuele kennis van belang zowel in het zelf uitvoeren van statistiek als in het op waarde kunnen schatten van statistiek die je in het dagelijks leven tegenkomt.

We hebben laten zien dat het hier vooral gaat om onderliggende ideeën van het onderwerp zelf, maar ook de ideeën die verder reiken. Daarmee pleiten we voor meer expliciete aandacht voor algemene ideeën die tijdloos en toepassingsonafhankelijk zijn. Deze zorgen immers voor een netwerk van ideeën dat een kapstok kan bieden voor later leren. De focus op onderliggend begrip is bovendien een zeer efficiënte manier om nieuwe kennis en vaardigheden te benaderen. Daarnaast bieden de onderliggende concepten de basis voor een kritisch wiskundige houding. We hebben laten zien dat een dergelijke andere focus het onderwijs een andere richting kan geven en daarmee toekomstbestendig maakt zonder verlies van de beheersing van kennis en vaardigheden zoals we die in het huidige onderwijs kennen.

REFERENTIES

Blauw, S. (2016). Hoe precieze cijfers ons misleiden en de geschiedenis bepalen. De Correspondent.

Cox, K., de Louw, D., Verhoef, J., & Kuiper, C. (2012). *Evidence-based practice voor verpleegkundigen, Methodiek en toepassing*. Den Haag: Boom Lemma Uitgevers.

Derksen, A. A. & Eymers, H. (2006). *Lucia de B.: reconstructie van een gerechtelijke dwaling*. Veen Magazines.

Erwich, B. & Van Maarseveen, J. (1999). *Een eeuw statistieken. Historisch-methodologische schetsen van de Nederlandse officiële statistieken in de twintigste eeuw*. CBS, Voorburg.

Hattie, J. (2008). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Routledge.

Hattie, J. (2012). *Visible learning for teachers: Maximizing impact on learning*. Routledge.

Hoekstra, R. (2009). *The use and usability of inferential techniques*. PhD thesis, Rijksuniversiteit Groningen.

Ioannidis, J. (2005). Why most published research findings are false. *PLoS Med*, 2(8), 696–701.

Levels, M. (18 augustus 2016). Nee meneer de politicus, mijn statistieken zijn niet links. NRC Handelsblad. Geraadpleegd van <https://www.nrc.nl/nieuws/2016/08/18/nee-meneer-de-politicus-mijn-statistieken-zijn-niet-links-3838884-a1516993>.

Matejka, J. & Fitzmaurice, G. (2017). Same stats, different graphs: Generating datasets with varied appearance and identical statistics through simulated annealing. In *Proceedings of the 2017 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 1290–1294).: ACM.

McClave, J., Benson, P., Sincich, T., Smitt, P., & Geilenkirchen, J. (2003). *Statistiek: een inleiding voor het hoger onderwijs*. Prentice Hall.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.