

Contexten als basis voor wiskundig redeneren

[Irene van Stiphout en Geeke Bruin-Muurling]

Inleiding

In het curriculum van het voortgezet onderwijs staan verbanden centraal. In de onderbouw wordt er veel aandacht besteed aan lineaire verbanden. Bij de introductie van deze verbanden spelen contexten een belangrijke rol. In dit artikel bespreken we de beperkingen die kunnen voortkomen uit gebruik van een eenzijdig type opgaven. We laten zien hoe creatief omgaan met deze contexten zou kunnen zorgen voor een basis die meer ruimte laat voor bijvoorbeeld generaliseerbaarheid.

Een voorbeeld

Bij de introductie van lineaire verbanden worden vaak contexten gebruikt die gebaseerd zijn op een kostenstructuur van een vast starttarief en een tarief per tijdseenheid, oftewel een vast deel en een variabel deel van de kosten. Zo'n context kan bijvoorbeeld de huurprijs van een caravan zijn die afhankelijk is van het aantal dagen, en waar bovenop een bedrag voor de schoonmaakkosten wordt gerekend. We nemen deze context hier even als uitgangspunt om aan te geven wat er voor leerlingen een rol kan spelen. Een eerste punt is de vraag in hoeverre een dergelijke context als betekenisvol wordt ervaren door leerlingen. Veel leerlingen zullen uit ervaring weten dat de kosten van een vakantie niet op een dergelijke manier worden berekend. Leerlingen hebben als het ware te veel kennis van de context en vinden versimpeling van de situatie lastig of niet realistisch. Maar ook wiskundig is er iets aan de hand met dit soort contexten. Zouden we namelijk de grafiek van deze of een soortgelijke situatie met vaste en variabele kosten tekenen dan zouden deze er ongeveer uit zien als *in figuur 1*. We hebben hier te maken met een trapfunctie, omdat de kosten per tijdseenheid worden berekend; de kosten veranderen per tijdseenheid en niet continu zoals in een strikt lineair verband. Dit onderscheid wordt overigens over het algemeen niet gemaakt omdat er naar discrete waarden wordt gekeken en bijna stilzwingend een rechte lijn door deze

puntengrafiek wordt getrokken. Fundamenteeler van aard is de discontinuïteit bij de verticale as. Als er niet gehuurd wordt, dan wordt er ook niets betaald. De schoonmaakkosten worden immers pas in rekening gebracht als er ten minste één dag wordt gehuurd. In de schoolboeken wordt dit punt vaak onbesproken gelaten, en komt de lijn die door de puntengrafiek wordt getrokken wel uit bij het tarief voor de schoonmaakkosten op de verticale as.

Lineair verband als model van de werkelijkheid

In het voorbeeld komt naar voren dat contexten met een kostenstructuur met een vast starttarief en een tarief per tijdseenheid niet 'perfect lineair' zijn. De lineariteit is een versimpeling van de werkelijkheid: een zinvolle modellering die het mogelijk maakt om 'makkelijk' te rekenen in de context, en die bovendien in veel verschillende contexten een rol speelt. Naast de genoemde twee beperkingen zijn er nog twee veel voorkomende beperkingen van contexten voor lineaire verbanden:

1. In de context zijn het domein en het bereik beperkt in de grootte. De x -waarde en y -waarde zijn bijvoorbeeld niet negatief; het verband ligt in het eerste kwadrant. Of de x -waarde mag niet te groot zijn; een caravan is bijvoorbeeld niet te huur voor 100 jaar.
2. Het verband in de context is stijgend. Dalende verbanden (zoals de hoogte van een kaars afhankelijk van het aantal branduren) komen weinig voor en hebben vaak geen betekenis voor negatieve y -waarden.

De context als startpunt voor verder wiskundig redeneren

Waar het voor leerlingen misschien wel duidelijk is dat er lineaire verbanden zijn in het dagelijks leven en dat je ze daarom bij wiskunde bestudeert, zien leerlingen dat hoogstwaarschijnlijk niet bewust als 'benaderingen' en dus niet als modellen van de werkelijkheid. Dat zorgt voor een drietal bezwaren.

Ten eerste, als er niet expliciet met leerlingen wordt gesproken over de punten

waarop de werkelijkheid of de context afwijkt van de 'perfecte lineariteit', dan wordt de kans gemist om de kracht van wiskundig modelleren te laten zien. Ten tweede wordt de indruk gewekt dat er veel meer lineair is dan er in werkelijkheid is. In ieder geval worden leerlingen niet getraind om kritisch te kijken naar de werkelijkheid die ze modelleren. Ten slotte kan het problemen opleveren bij het gebruiken van de context als startpunt voor wiskundig redeneren; de andere functie van de context. Op dit laatste punt zullen we verder ingaan.

Dat contexten afwijken van de perfecte lineariteit zien we niet als probleem voor het gebruik van contexten als startpunt voor wiskundig redeneren. Wel een probleem is de eenzijdigheid van punten waarop ze afwijken. De mogelijkheid ontstaat dat eenzelfde 'beperking' die in alle aangeboden contexten voorkomt, als onderdeel gezien wordt van de wiskundige structuur. Als bijvoorbeeld in geen enkele context $x = 0$ betekenis heeft, dan zijn die contexten niet geschikt als bron voor de begripsinvulling van het snijpunt met de verticale as en de verbinding met b in de algemene formule $y = ax + b$.

We zien dan een gat ontstaan in de overgang van contexten naar formele wiskunde. Als de wiskundige structuur van de contexten niet voldoende duidelijk wordt of als daarin verkeerde dingen worden meegenomen, dan kunnen leerlingen in de problemen komen om hun informele strategieën, die ze in de contexten konden gebruiken, te verbinden met het formele niveau waar ze uit moeten komen. Daarmee verliezen contexten aan kracht omdat ze dan niet langer dienen als startpunt voor wiskundig redeneren.

Het versterken van de basis

Om de contexten als basis voor wiskundig redeneren te gebruiken zien we een aantal aandachtspunten.

- Leerlingen moeten de relatie gaan zien tussen de verschillende contexten in de opgaven. Die relatie is het wiskundige model dat beschreven wordt in het lineair verband. Het lineaire verband

is dus een model van de context waarbij de werkelijkheid (uiteraard) wordt vereenvoudigd. We denken dat leerlingen baat hebben bij een explicitering van de punten waarop de werkelijkheid is versimpeld.

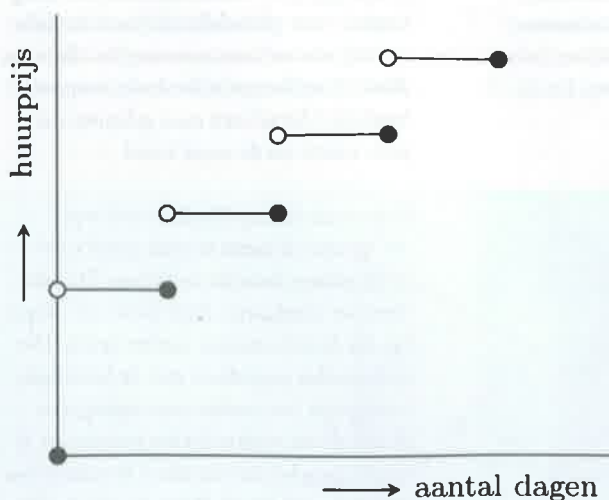
- Als opgaven in samenhang worden gezien, kunnen er actief verbindingen worden gelegd tussen de contexten en de wiskundige inhoud waarvan het de bedoeling is dat leerlingen uitkomen.

De contexten kunnen door een docent worden aangedragen, maar het zoeken naar contexten kan ook een zinvolle activiteit voor leerlingen zelf zijn. Door de lijst van genoemde vereenvoudigingen ten opzichte van de werkelijkheid als uitgangspunt te nemen kunnen meer gevarieerde contexten worden gevonden. Dan dienen zich wellicht contexten aan die meer betekenis hebben in de werkelijkheid en die niet geconstrueerd zijn om te kunnen dienen als startpunt voor verder wiskundig redeneren. Dan komen wellicht contexten naar voren als het nabestellen van foto's met verwerkingskosten, maar ook verschillende kosten per stuk afhankelijk van het aantal na te bestellen foto's. Het omrekenen van bijvoorbeeld temperatuur in Fahrenheit, Celsius en Kelvin waar je te maken hebt met verschuiving en 'vervorming' van de

schaal. En meer in zijn algemeenheid het omrekenen van allerlei maateenheden naar de standaard SI-eenheden. Andere schoolvakken kunnen dan ook een bron van inspiratie worden, zoals vraag- en aanbodfuncties, $q_v = -\frac{1}{2}p + 8$ en $q_a = 2p - 7$, bij economie en $s = vt$, $v = at$ en $V = I \cdot R$ bij natuurkunde.

Ten slotte denken we dat leerlingen erbij gebaat zijn om op tijd de overgang te maken van het zien van de context als het oplossen van een particulier probleem naar het zien van de context als een representatie van een wiskundige structuur. In het voorbeeld van de huurprijs van de caravan betekent dit dat het niet gaat om het antwoord op de vraag wat twee weken kost, maar dat het gaat om het herkennen van de algemene structuur van een lineair verband als bestaande uit een vast en een variabel deel.

Dan opent zich ook de mogelijkheid om de grenzen op te gaan zoeken, een authentieke wiskundige activiteit. Zo kun je gaan kijken of allerlei denkbare lijnen in een assenstelsel zich laten beschrijven als $y = ax + b$, zoals horizontale lijn, verticale lijn, lijn door de oorsprong, dalende en stijgende lijnen en lijnen in de verschillende kwadranten.



figuur 1 De grafiek van de voorbeeld-opgave van de huurprijs van een caravan

Conclusie

We hebben in het voorgaande laten zien dat er belangrijke, inherente beperkingen zitten in de algemeen gebruikte contexten van lineaire verbanden. Het gebruik van gevarieerde contexten met een mix van de genoemde beperkingen biedt hiervoor de oplossing. Het is dan van belang dat leerlingen focussen op de aspecten van de contexten die ook wiskundig van belang zijn, zoals de invloed van het variabele en constante deel, en niet meer worden afgeleid door toevallige overeenkomsten in de contexten die wiskundig minder van belang zijn. Die overgang van contexten naar een model voor wiskundig redeneren moet door leerlingen misschien wel bewuster worden gemaakt.

Lukt het niet om deze overgang goed te maken dan staat de rol van de contexten als startpunt voor wiskundig redeneren onder druk. Het gevaar is dat je dan op een dubbel didactisch spoor uitkomt: een begin in de contexten, en los daarvan een introductie op formeel niveau (zie [1]).

Kortom: het gebruik van contexten als basis voor wiskundig redeneren vraagt om het verbinden van die contexten, het herkennen van de gezamenlijke structuur en een zorgvuldige overgang van de contexten naar de beoogde wiskundige inhoud.

Literatuur

- [1] I.M. van Stiphout (2011): *The development of algebraic proficiency*. Proefschrift, Technische Universiteit Eindhoven.

Over de auteurs

Irene van Stiphout en Geeke Bruin-Muurling zijn beiden gepromoveerd bij de Eindhoven School of Education.

Irene promoveerde in 2011 op een onderzoek naar de ontwikkeling van algebraïsche vaardigheden. Ze werkt nu als toetsdeskundige bij het Cito.

Geeke promoveerde in 2010 op een onderzoek naar de rol van breuken in de aansluiting van basisschool naar voortgezet onderwijs. Ze werkt als onderzoeker bij de TU/e.