Tijd voor ander rekenonderwijs
(gepubliceerd op Didactief online: http://www.didactiefonline.nl/)

Koeno Gravemeijer. Vrijwel alle rekenbewerkingen die kinderen nu leren, worden in de wereld buiten de school door computers uitgevoerd. Maar dat maakt het rekenonderwijs niet overbodig. Ook om te kunnen werken met apparaten die allerhande rekenwerk voor jou uitvoeren, heb je rekenvaardigheden nodig. Maar dat zijn wel andere rekenvaardigheden, dan die waar rekenonderwijs zich nu op richt. Het gaat dan om het kunnen toepassen van rekenkennis, het begrijpen van wat de computer doet en de computer globaal kunnen controleren. Naast meer aandacht voor toepassen en begrijpen, vraagt dit ook een verandering van leerstof.

Computers veranderen de maatschappij op twee manieren, enerzijds door arbeid overbodig te maken, anderzijds door nieuwe werkgelegenheid te creëren. Zo nemen computers allerlei taken over; met name in tal van industriële processen, maar ook door de prijs te berekenen van de groente die je in de supermarkt afweegt, of door bankemployés overbodig te maken bij het opnemen van geld. Maar de computer creëert ook nieuwe mogelijkheden, zoals het gebruik van 3D-printers, het analyseren van “big data” en het doorrekenen van simulaties. In het eerste geval is de computer een concurrent, in het tweede geval een stuk gereedschap dat menselijk handelen aanvult.
Vertaald naar het onderwijs betekent dit, dat we ons niet zozeer moeten richten op vaardigheden die de computer overneemt, maar op vaardigheden die de computer aanvullen; de vaardigheden die je nodig hebt als je met computers of gecomputeriseerde apparaten werkt. Dat zijn vaardigheden die ook in bredere zin van belang zijn voor het participeren in een gecomputeriseerde maatschappij.
Voor het rekenen komen we dan op zaken als het *herkennen* van rekenkundige problemen, het *vertalen* van dergelijke problemen in rekenopdrachten die een computer kan uitvoeren, het *begrijpen* van die bewerkingen en het *interpreteren* en *evalueren* van antwoorden.
Het gaat hier grofweg om toepassen, begrijpen en globaal rekenen. Begrijpen en toepassen behoren tot gangbare rekendoelen – al zouden die wel veel meer aandacht moeten krijgen. Maar een keuze voor globaal rekenen leidt tot een grondige verandering van de leerstof. Om globaal te kunnen rekenen moet je beschikken over netwerken van getalrelaties en flexibel om kunnen gaan met eigenschappen van rekenoperaties.

Getalrelaties
Bij het evalueren van berekeningen is het voldoende om globaal te kunnen bepalen wat het antwoord ongeveer moet zijn. Om een eenvoudig voorbeeld te geven: bij een opgave als 4x27 kan dit betekenen dat een leerling bedenkt dat het antwoord ruim 100 (4 x 25) is, een ander dat het minder is dan 120 (4 x 30). En weer een andere leerling kan bedenken dat er 108 (2 x 54) uitkomt. Idealiter zou het zo moeten zijn dat leerlingen *die* getalrelaties gebruiken waar zij vertrouwd mee zijn.
Wanneer we willen dat leerlingen wat dit betreft goed beslagen ten ijs komen, dan moeten we investeren in het inoefenen van, en spelen met, getalrelaties die je veel kunt gebruiken. Voor vermenigvuldigen kunnen we bijvoorbeeld denken aan veelvouden van 25, 75, 125 en dergelijke en het kunnen relateren van deze getallen aan kommagetallen, breuken en

procenten. Het gaat uiteindelijk om netwerken van getalrelaties op basis waarvan leerlingen bijvoorbeeld kunnen bedenken dat 4 x 1,25 = 5, omdat 4 x 25 = 100, en dus 4 x 125 = 500, of, omdat 4 x 1,25 gelijk is aan 4 x 1¼.
Voor alle duidelijkheid: ik pleit niet voor allerlei regeltjes voor handig rekenen die de leerlingen zouden moeten leren toepassen. Wanneer de leerlingen beschikken over een netwerk van getalrelaties, kunnen ze deze getalrelaties als het ware opvatten als puzzelstukjes die ze zo kunnen combineren dat ze een antwoord vinden.
Denk bijvoorbeeld aan het uitrekenen van 7+8. Wanneer we deze opgave voorleggen aan jonge kinderen die over een passend netwerk van getalrelaties beschikken, dan zullen de getallen 7 en 8 verschillende getalrelaties bij hen oproepen. Zoals bijvoorbeeld: 7 + 3 = 10, 7 + 7 = 14, 8 = 7 + 1, 7 = 5 + 2, en 8 = 5 + 3.
Die kunnen zij op verschillende manieren combineren tot een rekenzin die het goede antwoord oplevert. Zoals:

7 + 8 = 5 + 5 + 2 + 3 = 10 + 5,
of: 7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 14 +1,
of: 7 + 8 = 7 + 3 + 5 = 10 + 5.

Reken-technisch gebruiken de leerlingen hier de 'associatieve' en de 'commutatieve' eigenschap. In het eerder genoemde voorbeeld van 5 x 25, gebruiken ze de 'distributieve' eigenschap: 5 x 25 = 4 x 25 + 1 x 25. Het gaat hier dus om het gebruiken van rekeneigenschappen en getalrelaties, en niet om het kiezen uit een repertoire van 'handige oplossingsstrategieën'.
Dat vraagt een ander basisschoolprogramma dan rekenonderwijs dat opleidt tot het snel en routinematig oplossen van rekenopgaven. De kracht van standaardprocedures is dat je geen rekening houdt met specifieke kenmerken van getallen: de procedure werkt altijd en je hoeft niet over de getallen na te denken. De keerzijde is dat je de hierboven beschreven getal- en rekenkennis niet ontwikkelt.
Een ander voordeel van standaardprocedures is dat ze efficiënt zijn in de kennis die ze gebruiken. Je hebt aan de basisautomatismen voor optellen en aftrekken en de tafels van vermenigvuldiging voldoende voor het uitvoeren van alle cijferalgoritmen. Maar ook hier is er weer een nadeel. Vermenigvuldigkennis die de gangbare tafels overstijgt – zoals veelvouden van 12, 15 en 25 – komen bij het cijferen niet aan de orde.

Onbenoemde getallen
Netwerken van getalrelaties hebben nog een andere functie: ze spelen een belangrijke rol bij de overgang van benoemde naar onbenoemde getallen. Bij het rekenen met natuurlijke getallen gaat dit min of meer vanzelf. Getallen die eerst alleen nog betekenis hebben in combinatie met concrete hoeveelheden, zoals in 'vier knikkers', krijgen geleidelijk aan het karakter van objecten, die hun betekenis ontlenen aan een netwerken van getalrelaties. Het getal 4 wordt dan geassocieerd met 4 = 3 + 1, 4 = 2 + 2, 4 = 5 – 1, 4 = 8 : 2, enz.
Bij breuken ligt hier een probleem. Onderzoek van Bruin-Muurling laat zien, dat leerlingen in het PO vrijwel uitsluitend met breuken als benoemde getallen werken, terwijl in het VO wordt verondersteld dat de instromende leerlingen het niveau van de onbenoemde getallen al hebben bereikt. Voor een goede aansluiting moeten de breuken ook hun betekenis gaan ontlenen aan getalrelaties. Bij ¾ kan dat bijvoorbeeld zijn: ¾ = ¼ + ¼ + ¼ = 3 x ¼ , ¾ = 1 – ¼ ,

¾ = ½ + ¼, of ¾ + ¾ = 1½, maar ook 3 : 4 = ¾, ¾ = 6/8 = 9/12 = 12/16 =…, en ¾ van 100 is 75, enz.

Een goede basis

Er is op dit moment veel aandacht voor de ‘basisvaardigheden’. Daarbij wordt gemakshalve aangenomen dat de basisvaardigheden voor rekenen onveranderlijk zijn. Maar wat zijn nu echt de basisvaardigheden die de leerlingen van nu nodig hebben? Daar hoort het vlot en routinematig vermenigvuldigen van getallen van drie of vier cijfers volgens mij niet bij. Buiten het onderwijs gebruik je daar de rekenmachine voor. Maar ook voor de wiskunde in het voortgezet onderwijs heb je deze vaardigheid niet nodig.
Wanneer je je afvraagt welke rekenkennis en vaardigheden een basis leggen voor algebra, dan kom je op andere zaken, zoals inzicht in de eigenschappen van rekenoperaties. Leerlingen moeten deze eigenschappen flexibel kunnen hanteren.
Zo zijn het vermenigvuldigen van tweetermen, ((a+b) x (c+d) = ac + ad + bc + bd), en de daarmee samenhangende merkwaardige producten, gebaseerd op het herhaald toepassen van de distributieve eigenschap. Dit flexibel gebruiken van eigenschappen van rekenoperaties is niet nieuw. Het heeft in Nederland een lange traditie in het zogeheten “hoofdrekenen”.

Samenvattend, wanneer we het rekenonderwijs zo willen inrichten dat het leerlingen zo goed mogelijk voorbereidt op de toekomst, dan zullen we een centrale plaats moeten inruimen voor het *ontwikkelen van netwerken van getalrelaties* en het *flexibel kunnen gebruiken van rekeneigenschappen*.

Tekst Koeno Gravemeijer

Meer artikelen over reken- en wiskundeonderwijs voor de 21^e^ eeuw zijn te vinden op www.rekenenwisk21.nl